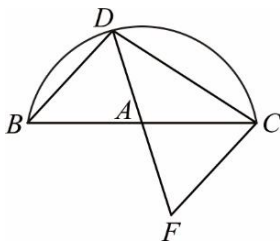


九年级贯通班中考数学新题型训练

1. 小亮在学习中遇到了这样一个问题：

如图，点 D 是 $\widehat{BC}$ 上一动点，线段 $BC=8\text{cm}$ ，
点 A 是线段 BC 的中点，过点 C 作 $CF\parallel BD$ ，交
 DA 的延长线于点 F 。当 $\triangle DCF$ 为等腰三角形时，
求线段 BD 的长。



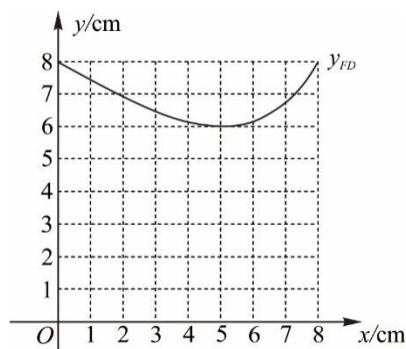
验研究此问题. 请将下面的探究过程补充完整：

- (1) 根据点 D 在 $\widehat{BC}$ 上的不同位置，画出相应的图形，测量线段 BD ， CD ， FD 的长度，得到下表的几组对应值.

BD/cm	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
CD/cm	8.0	7.7	7.2	6.6	5.9	a	3.9	2.4	0
FD/cm	8.0	7.4	6.9	6.5	6.1	6.0	6.2	6.7	8.0

操作中发现：

- ① “当点 D 为 $\widehat{BC}$ 的中点时， $BD=5.0\text{cm}$ ”. 则上表中 a 的值是_____；
 - ② “线段 CF 的长度无需测量即可得到”. 请简要说明理由.
- (2) 将线段 BD 的长度作为自变量 x ， CD 和 FD 的长度都是 x 的函数，分别记为 y_{CD} 和 y_{FD} ，并在平面直角坐标系 xOy 中画出了函数 y_{FD} 的图象，如图所示. 请在同一坐标系中画出函数 y_{CD} 的图象；
- (3) 继续在同一坐标系中画出所需的函数图象，并结合图象直接写出：当 $\triangle DCF$ 为等腰三角形时，线段 BD 长度的近似值（结果保留一位小数）.



解：(1)①5.0；(2分)

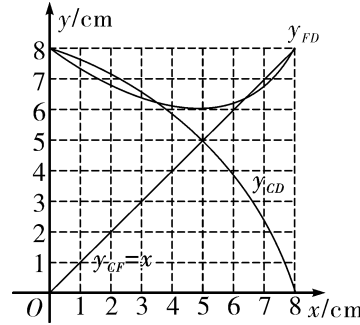
解法提示 $\because$ 点 D 是 $\widehat{BC}$ 的中点， $\therefore \widehat{BD}=\widehat{CD}$ ， $\therefore CD=BD=5.0$.

②∵点 A 是 BC 的中点, $\therefore AB=AC$.

∵ $CF \parallel BD$, $\therefore \angle ACF = \angle ABD$, $\angle F = \angle BDA$.

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle ABD$. $\therefore CF = BD$; (4 分)

(2) y_{CD} 的图象如解图所示; (6 分)



题解图

(3) y_{CF} 的图象如解图所示; (7 分)

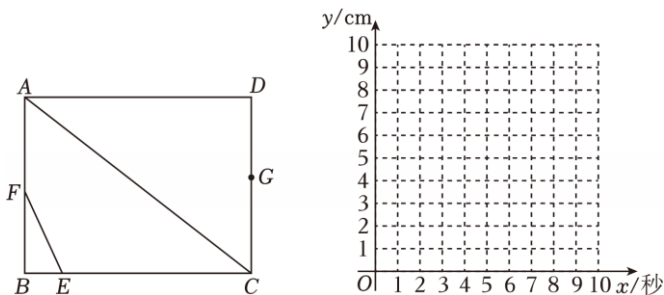
由解图可知, 当 $\triangle DCF$ 为等腰三角形时, 线段 BD 的长度约为 3.5 cm 或 5.0 cm 或 6.3 cm . (答案不唯一)(10 分)

解法提示 由(1)可知, $CF=BD$. 当 $\triangle DCF$ 为等腰三角形时, 可分三种情况讨论. ①当 $DC=CF$ 时, 由图象可知, $BD=CF=5.0\text{ cm}$, ②当 $DC=DF$ 时, 由图象可知, $BD=CF=3.5\text{ cm}$, ③当 $CF=DF$ 时, 由图象可知, $BD=CF=6.3\text{ cm}$. (答案不唯一)

2. 如图, 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB=6\text{ cm}$, $BC=8\text{ cm}$. 点 E 以每秒 1 cm 的速度沿 $B \rightarrow C$ 方向运动, 点 F 在直线 AB 上运动, 且满足 $S_{\triangle BEF} = 2\text{ cm}^2$. 点 G 与点 E 同时出发, 以每秒 2 cm 的速度沿折线 $D \rightarrow C \rightarrow A$ 方向运动. 设运动时间为 x 秒 ($0 < x < 8$), 点 F 与点 B 的距离为 y_1 , 点 G 与点 C 的距离为 y_2 .

(1) 请直接写出 y_1, y_2 关于 x 的函数表达式, 并分别写出自变量 x 的取值范围;

(2) 请在给定的平面直角坐标系中画出函数 y_1, y_2 的图象; 结合函数图象, 直接写出 $y_1 < y_2$ 时 x 的取值范围 (近似值保留小数点后一位, 误差不超过 0.2).



【分析】(1) 求 y_1 的函数表达式: 先根据点 E 的运动速度得到 $BE=x$, 再根据 $\angle B=90^\circ$, 将直角边 BE 和 BF 代入三角形面积公式, 可得出 BF 即 y_1 的表达式; 根据点 G 沿 $D \rightarrow C \rightarrow A$ 运动, G 速度为 2cm/s , 当 $0 < x \leq 3$ 时, $y_2 = 6 - 3x$, 当 $3 < x < 8$ 时, $y_2 = 2(x - 3) = 2x - 6$, 分两种情况解答;

(2) 根据 y_1, y_2 的函数类型和自变量取值范围, 列表, 描点, 连线, 画出图象.

【解答】解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB=6\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$.

$$\therefore \angle B=90^\circ, \therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 10(\text{cm}),$$

$\because$ 点 E 以每秒 1cm 的速度沿 $B \rightarrow C$ 方向运动, 点 F 在直线 AB 上运动, 且满足 $S_{\triangle BEF} = 2\text{cm}^2$, 运动时间 x 秒, $\therefore BE=x\text{cm}$,

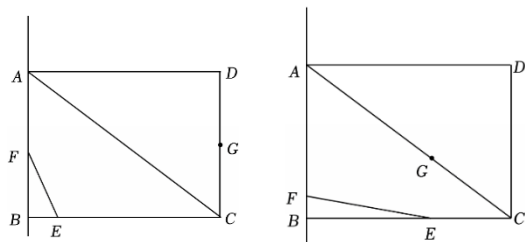
$$\therefore S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF = \frac{1}{2} xy_1, \therefore \frac{1}{2} \cdot x \cdot y_1 = 2, \therefore y_1 = \frac{4}{x} (0 < x < 8);$$

$\because$ 点 G 沿 $D \rightarrow C \rightarrow A$ 运动, G 速度为 2cm/s , $DC=AB=6\text{cm}$,

$\therefore$ 当 $0 < x \leq 3$ 时, $y_2 = 6 - 2x$,

当 $3 < x < 8$ 时, $y_2 = 2(x - 3) = 2x - 6$,

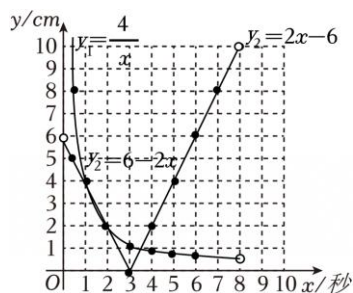
$$\text{综上, } y_2 = \begin{cases} 6 - 2x (0 < x \leq 3) \\ 2x - 6 (3 < x < 8) \end{cases};$$



(2) 列表:

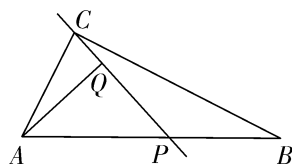
x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	8
y_1		8	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
y_2	6	5	4	2	0	2	4	6	10

以表中每对 x, y_1 的值和 x, y_2 的值作为点的坐标在平面直角坐标系中描点, 用顺滑的线依次连接各点, 得到 y_1 和 y_2 的图象.



由图象看出当 $y_1 < y_2$ 时, $1 < x < 2$ 或 $3.6 < x < 8$.

3.小明在学习时遇到这样一个问题:



图①

如图①,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AB=5\text{ cm}$, $BC=2AC$, P 是 AB 边上一动点,作直线 CP ,过点 A 作 $AQ\perp CP$ 于点 Q .当 $\triangle APQ$ 中有一个角为 30° 时,求 AP 的长.

小明分析发现:此问题用几何推理很难计算,于是尝试结合学习函数的经验研究此问题,设 A 、 P 两点间的距离为 $x\text{ cm}$, A 、 Q 两点间的距离为 $y_1\text{ cm}$, P 、 Q 两点间的距离为 $y_2\text{ cm}$.分别对函数 y_1 、 y_2 随自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究.

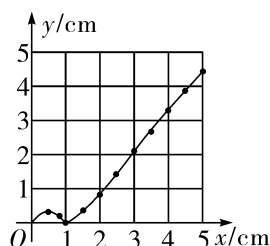
下面是小明的探究过程,请补充完整:

(1)列表:下表的已知数据是根据 A 、 P 两点间的距离 x 进行取点、画图、测量,分别得到了 x 与 y 的几组对应值:

x/cm	0	0.5	0.8	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y_1/cm	0	0.48	0.80	1	1.46	1.79	m	2.12	2.19	2.22	2.23	2.24
y_2/cm	0	0.12	0.08	0	0.37	0.90	1.50	2.11	2.72	3.32	3.91	4.47

求上表中 m 的值;

(2)描点、连线:在平面直角坐标系中已画出了 y_2 的函数图象,如图②所示,请在同一坐标系中画出函数 y_1 的图象;



图②

(3)探究性质:随着自变量 x 的不断增大,函数 y_1 是怎样变化的? _____;

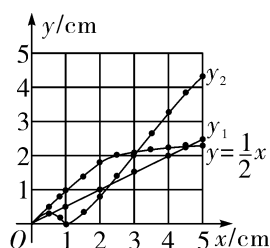
(4)解决问题:继续在同一坐标系中画出所需的函数图象,并结合图象直接写出:当 $\triangle APQ$ 中有一个角为 30° 时, AP 的长为_____cm.(结果保留1位小数,误差不超过0.2 cm)

解: (1)2:(2分)

【解法提示】观察表格中的数据可知 $AP=2.5\text{ cm}$, $QP=1.5\text{ cm}$, $\because AQ\perp CP$, $\therefore \angle AQP=90^\circ$.

在 $Rt\triangle AQP$ 中,由勾股定理得 $AQ=\sqrt{AP^2-QP^2}=\sqrt{2.5^2-1.5^2}=2$.

(2)根据表格数据描点、连线,绘制函数图象如解图:(4分)



第 22 题解图

(3) y_1 随 x 的增大而增大;(6 分)

(4) 2.2 或 4.5.....(10 分)

【解法提示】当 $\triangle APQ$ 中有一个角为 30° , $\because \angle AQP = 90^\circ$, $\therefore$ 分 $\angle QAP = 30^\circ$ 和 $\angle APQ = 30^\circ$ 两种情况讨论. ①当 $\angle QAP = 30^\circ$ 时, 有 $QP = \frac{1}{2}AP$, 即 $y_2 = \frac{1}{2}x$, ②当 $\angle APQ = 30^\circ$ 时, 有 $AQ = \frac{1}{2}AP$, 即 $y_1 = \frac{1}{2}x$, 在平面直角坐标系中画出 $y = \frac{1}{2}x$ 的图象如解图, 分别观察可知 AP 的长度约为 2.2 或 4.5.

4. 【问题背景】“刻漏”是我国古代的一种利用水流计时的工具. 综合实践小组准备用甲、乙两个透明的竖直放置的容器和一根带节流阀(控制水的流速大小)的软管制作简易计时装置.

【实验操作】综合实践小组设计了如下的实验: 先在甲容器里加满水, 此时水面高度为 30cm , 开始放水后每隔 10min 观察一次甲容器中的水面高度, 获得的数据如表:

流水时间 t / min	0	10	20	30	40
水面高度 h / cm (观察值)	30	29	28.1	27	25.8

任务 1: 分别计算表中每隔 10min 水面高度观察值的变化量.

【建立模型】小组讨论发现: “ $t = 0$, $h = 30$ ”是初始状态下的准确数据, 水面高度值的变化不均匀, 但可以用一次函数近似地刻画水面高度 h 与流水时间 t 的关系.

任务 2: 利用 $t = 0$ 时, $h = 30$; $t = 10$ 时, $h = 29$ 这两组数据求水面高度 h 与流水时间 t 的函数解析式;

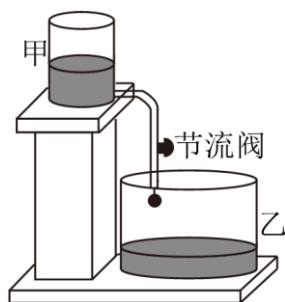
【反思优化】经检验, 发现有两组表中观察值不满足任务 2 中求出的函数解析式, 存在偏差, 小组决定优化函数解析式, 减少偏差. 通过查阅资料后知道: t 为表中数据时, 根据解析式求出所对应的函数值, 计算这些函数值与对应 h 的观察值之差的平方和, 记为 w ; w 越小, 偏差越小.

任务 3: (1) 计算任务 2 得到的函数解析式的 w 值;

(2) 请确定经过 $(0, 30)$ 的一次函数解析式, 使得 w 的值最小;

【设计刻度】得到优化的函数解析式后, 综合实践小组决定在甲容器外壁设计刻度, 通过刻度直接读取时间.

任务 4: 请你简要写出时间刻度的设计方案.



解：任务 1：变化量分别为：29－30＝－1cm，28.1－29＝－0.9cm；

27－28.1＝－1.1cm；25.8－27＝－1.2cm；

说明：学生写出正值变化量也给分，如 0 至 10 分钟减少：30－29＝1cm.

任务 2：设 $h=kt+b(k \neq 0)$ ，

$\because t=0$ 时， $h=30$ ， $t=10$ 时， $h=29$ ；

$$\therefore \begin{cases} b=30, \\ 10k+b=29, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k=-0.1, \\ b=30. \end{cases}$$

$\therefore$ 水面高度 h 与流水时间 t 的函数解析式为 $h=-0.1t+30$ ；

任务 3：(1) $w=(30-30)^2+(29-29)^2+(28-28.1)^2+(27-27)^2+(26-25.8)^2=0.05$ ；

(2) 设 $h=kt+30$ ，则

$$\begin{aligned} w &= (30-30)^2 + (10k+30-29)^2 + (20k+30-28.1)^2 + (30k+30-27)^2 + (40k+30-25.8)^2 \\ &= (10k+1)^2 + (20k+1.9)^2 + (30k+3)^2 + (40k+4.2)^2 \\ &= 3000k^2 + 612k + 1^2 + 1.9^2 + 3^2 + 4.2^2. \end{aligned}$$

当 $k=-\frac{612}{2 \times 3000}=-0.102$ 时， w 最小.

$\therefore$ 优化后的函数解析式为 $h=-0.102t+30$ ，可使得 w 的值最小；

说明：上述问题解决过程中，方法正确， k 的计算值出现错误，此小题给 2 分.

任务 4：时间刻度方案要点：

- ① 时间刻度的 0 刻度在水位最高处；
- ② 刻度从上向下均匀变大；
- ③ 每 0.102cm 表示 1min (1cm 表示时间约为 9.8min).

5. 如图①，灌溉车沿着平行于绿化带底部边线 l 的方向行驶，为绿化带浇水. 喷水口 H 离地竖直高度为 h (单位：m). 如图②，可以把灌溉车喷出水的上、下边缘抽象为平面直角坐标系中两条抛物线的部分图象；把绿化带横截面抽象为矩形 $DEFG$ ，其水平宽度 $DE=$

3m, 竖直高度为 EF 的长. 下边缘抛物线是由上边缘抛物线向左平移得到, 上边缘抛物线最高点 A 离喷水口的水平距离为 2m, 高出喷水口 0.5m, 灌溉车到 l 的距离 OD 为 d (单位: m).

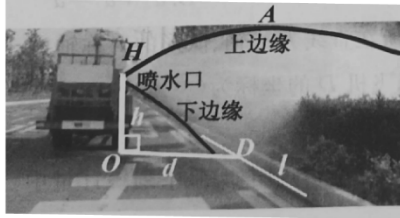


图 ①

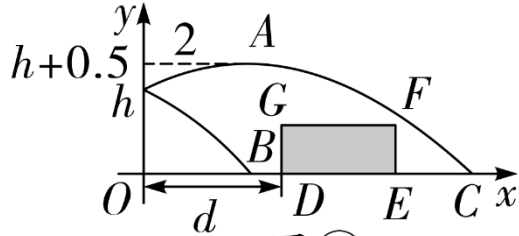


图 ②

(1) 若 $h=1.5$, $EF=0.5$ m.

① 求上边缘抛物线的函数解析式, 并求喷出水的最大射程 OC ;

② 求下边缘抛物线与 x 轴的正半轴交点 B 的坐标;

③ 要使灌溉车行驶时喷出的水能浇灌到整个绿化带, 求 d 的取值范围.

(2) 若 $EF=1$ m. 要使灌溉车行驶时喷出的水能浇灌到整个绿化带, 请直接写出 h 的最小值.

解: (1) ① 如解图①, 由题意得 $A(2, 2)$ 是上边缘抛物线的顶点,

设 $y=a(x-2)^2+2$. $\because$ 抛物线经过点 $(0, 1.5)$, $\therefore 1.5=4a+2$, $\therefore a=-\frac{1}{8}$,

$\therefore$ 上边缘抛物线的函数解析式为 $y=-\frac{1}{8}(x-2)^2+2$.

当 $y=0$ 时, $-\frac{1}{8}(x-2)^2+2=0$, $\therefore x_1=6$, $x_2=-2$ (舍去),

$\therefore$ 喷出水的最大射程 OC 为 6m;

② $\because$ 对称轴为直线 $x=2$,

$\therefore$ 点 $(0, 1.5)$ 的对称点的坐标为 $(4, 1.5)$,

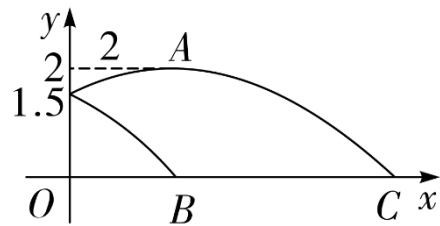
$\therefore$ 下边缘抛物线是由上边缘抛物线向左平移 4m 得到的,

即点 B 是由点 C 向左平移 4m 得到, 则点 B 的坐标为 $(2, 0)$.

③ 如解图②, 先看上边缘抛物线,

$\because EF=0.5$, $\therefore$ 点 F 的纵坐标为 0.5.

抛物线恰好经过点 F 时, $-\frac{1}{8}(x-2)^2+2=0.5$, 解得 $x=2\pm 2\sqrt{3}$,



$\therefore x > 0, \therefore x = 2 + 2\sqrt{3}$.

当 $x > 2$ 时, y 随着 x 的增大而减小, $\therefore$ 当 $2 \leq x \leq 6$ 时, 要使 $y \geq 0.5$, 则 $x \leq 2 + 2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 当 $0 \leq x < 2$ 时, y 随 x 的增大而增大, 且 $x = 0$ 时, $y = 1.5 > 0.5$, $\therefore$ 当 $0 \leq x \leq 6$ 时, 要使 $y \geq 0.5$,

则 $0 \leq x \leq 2 + 2\sqrt{3}$.

$\therefore DE = 3$, 灌溉车喷出的水要浇灌到整个绿化带,

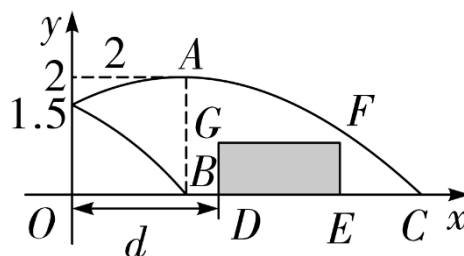
$\therefore d$ 的最大值为 $(2 + 2\sqrt{3}) - 3 = 2\sqrt{3} - 1$.

再看下边缘抛物线, 喷出的水能浇灌到绿化带底部的条件是 $OB \leq d$, $\therefore d$ 的最小值为 2.

综上所述, d 的取值范围是 $2 \leq d \leq 2\sqrt{3} - 1$;

(2) h 的最小值为 $\frac{65}{32}$.

【解法提示】当喷水口高度最低, 且恰好能浇灌到整个绿化带时, 点 D, F 恰好分别在两条抛物线上, 故设点



$D(m, -\frac{1}{8}(m+2)^2 + h + 0.5)$, $F(m+3, -\frac{1}{8}(m+3-2)^2 + h + 0.5)$, 则有 $-\frac{1}{8}(m+3-2)^2 + h$

$+ 0.5 - [-\frac{1}{8}(m+2)^2 + h + 0.5] = 1$, 解得 $m = 2.5$, 代入得点 D 的纵坐标为 $h - \frac{65}{32}$, 得 $h -$

$\frac{65}{32} = 0$, $\therefore h$ 的最小值为 $\frac{65}{32}$.

6. 数学活动: 探究一次函数与反比例函数的关系

【定义】当两个函数图象无交点时, 称它们为“陌生函数”; 当两个函数图象只有一个交点时, 称它们为“相连函数”, 交点为相连点; 当两个函数图象有两个交点时, 称它们为“友好函数”, 交点为友好点.

根据定义在判定一次函数与反比例函数为何种关系函数时, 可用以下两种方法:

【方法一】根据函数表达式画出图象, 由图象确定. 如图 1, 因为一次函数与反比例函数图象没有交点, 所以它们是“陌生函数”.

【方法二】根据一元二次方程根的判别式确定. 如判定 $y = 2x - 1$ 与 $y = \frac{1}{x}$ 的关系时, 由函数表达式得 $2x - 1 = \frac{1}{x}$, 去分母得 $2x^2 - x - 1 = 0$, 因为 $\Delta = 9 > 0$, 所以函数图象有两个交点, 故它们是“友好函数”.

【问题解决】(1) 对于函数① $y = -\frac{2}{x}$, ② $y = 2x$, ③ $y = -3x + 1$.

其中①与②是“_____ 函数”，①与③是“_____ 函数”；

(2) 若 $y_1 = \frac{m}{x} (m \neq 0)$ 与 $y_2 = kx + b (k \neq 0)$ 是“友好函数”，如图 2，当 $y_1 > y_2$ 时， x 的取值范围是_____；若 $y = \frac{n}{x} (n \neq 0)$ 与 $y = 2x - 6$ 是“相连函数”，则 n 的值为_____；

(3) 如图 3，过点 $C(0, 6)$ 的直线 l_1, l_2 对应的函数分别与 $y = \frac{k_1}{x} (k_1 \neq 0, x < 0)$, $y = \frac{k_2}{x} (k_2 \neq 0, x > 0)$ 是“相连函数”，相连点分别为 P, Q , l_1, l_2 与 x 轴分别交于 A, B 两点，已知 $AB = 6$, $k_1 k_2 = -18$ ，求 $k_1^2 + k_2^2$ 的值。

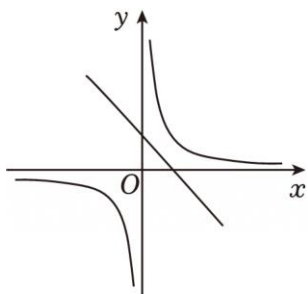


图 1

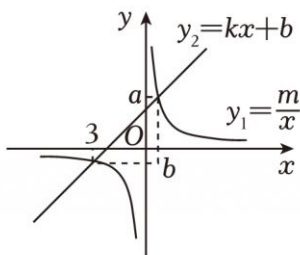


图 2

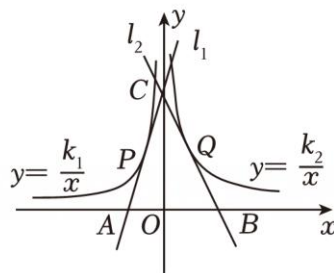


图 3

【解答】解：(1) 对于①与②，联立得 $-\frac{2}{x} = 2x$ ，整理得， $x^2 + 1 = 0$ ，

$\therefore x^2 + 1 \geq 1$ ， $\therefore$ 该方程无实数解，即 $y = -\frac{2}{x}$ 与 $y = 2x$ 无交点， $\therefore$ ①与②是“陌生函数”，

对于①与③，联立得 $-\frac{2}{x} = -3x + 1$ ，整理得， $3x^2 - x - 2 = 0$ ，

解得 $x = -\frac{2}{3}$ 或 $x = 1$ ， $\therefore y = -\frac{2}{x}$ 与 $y = -3x + 1$ 有两个交点， $\therefore$ ①与③是“友好函数”，

故答案为：陌生；友好；

(2) 由图可知，两个函数的交点的横坐标为 -3 和 1 ，且在 $x < -3$ 和 $0 < x < 1$ 部分，反比例函数的图象高于一次函数的图象，

$\therefore$ 当 $y_1 > y_2$ 时， x 的取值范围是 $x < -3$ 或 $0 < x < 1$ ；

联立 $y = \frac{n}{x} (n \neq 0)$ 与 $y = 2x - 6$ ，得 $\frac{n}{x} = 2x - 6$ ，整理得， $2x^2 - 6x - n = 0$ ，

当 $x = 0$ 时， $n = 0$ ，与 $n \neq 0$ 矛盾， $\therefore x \neq 0$ ，

$\therefore y = \frac{n}{x} (n \neq 0)$ 与 $y = 2x - 6$ 是“相连函数”， $\therefore \Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times (-n) = 0$ ，解得 $n = -\frac{9}{2}$ ，

故答案为： $x < -3$ 或 $0 < x < 1$ ， $-\frac{9}{2}$ ；

(3) 设直线 l_1 的函数解析式为 $y = k_3x + 6$ ，直线 l_2 的函数解析式为 $y = k_4x + 6$ ，

联立 $y=k_3x+6$ 与 $y=\frac{k_1}{x}$, 得 $k_3x+6=\frac{k_1}{x}$, 整理, 得 $k_3x^2+6x-k_1=0$,

当 $x=0$ 时, $k_1=0$ 与题意矛盾, $\therefore x \neq 0$,

$\therefore y=k_3x+6$ 与 $y=\frac{k_1}{x}$ 是“相连函数”, $\therefore \Delta=6^2-4k_3(-k_1)=0$,

$\therefore k_1k_3=-9$, 即 $k_3=-\frac{9}{k_1}$, $\therefore$ 直线 l_1 的函数解析式为 $y=-\frac{9}{k_1}x+6$,

将 $y=0$ 代入 $y=-\frac{9}{k_1}x+6$, 得 $x=\frac{2}{3}k_1$, $\therefore$ 点 A 的坐标为 $(\frac{2}{3}k_1, 0)$,

同理, 点 B 的坐标为 $(\frac{2}{3}k_2, 0)$, $\therefore AB=\frac{2}{3}k_2-\frac{2}{3}k_1=6$, 即 $k_2-k_1=9$,

$\therefore k_1^2+k_2^2=(k_1-k_2)^2+2k_1k_2=9^2+2 \times (-18)=45$.

7. 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=kx$ 与反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象相交于 $A(1, a)$, B 两点, 过点 A 分别作 x 轴, y 轴的垂线, 垂足分别为 C, D .

(1) 求线段 AB 的长;

(2) 已知 P 为 y 轴正半轴上一点, 若 $\triangle ABP$ 为直角三角形, 求点 P 的坐标;

(3) 如图 2, 将线段 DA, AC 组成的折线段“ $D-A-C$ ”沿 x 轴正方向平移得到折线段“ $D'-A'-C'$ ”, 点 D, A, C 的对应点分别为 D', A', C' . $A'C'$ 与反比例函数的图象交于点 E , 直线 BD' 与反比例函数的图象在第一象限交于点 F , OE 与 $C'F$ 交于点 G . 试探究: 在平移过程中, $\frac{FG}{GC'}$ 的值是否为定值? 若是, 求出这个值; 若不是, 请说明理由.

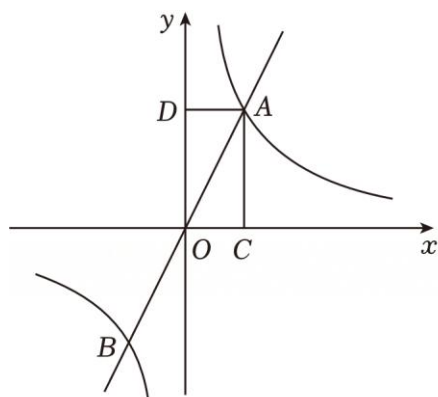


图1

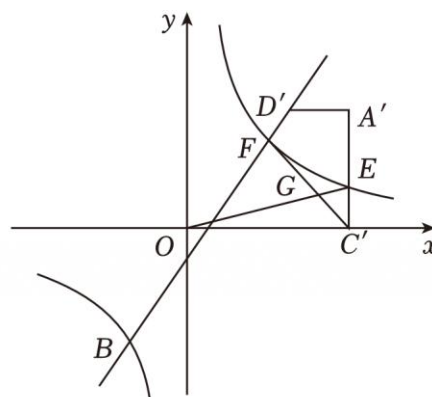


图2

【分析】 (1) 将 $A(1, a)$ 代入反比例函数解析式求出点 A 坐标, 再代入正比例函数解析式求出直线解析式, 根据正比例函数与反比例函数的交点关于原点对称即可求出 $B(-1, -2)$, 最后根据两点距离公式求解即可;

(2) 设 $P(0, p)$, $p > 0$, 分三种情况讨论直角位置: ① $\angle APB = 90^\circ$, ② $\angle PAB = 90^\circ$, ③ $\angle PBA = 90^\circ$, 根据勾股定理列方程求解即可;

(3) 设平移距离为 t ($t > 0$), 则 $D'(t, 2)$, $C'(1+t, 0)$, $E(1+t, \frac{2}{1+t})$, 求出直线 BD 的解析式, 与 $y = \frac{2}{x}$ 联立, 求出点 $F(\frac{t+1}{2}, \frac{4}{t+1})$, 求出 OE 的解析式, 直线 $C'F$ 的解析式, 联立后求出交点 G 的横坐标 $x_G = \frac{4(1+t)}{5}$, 过点 G, F 分别作 $GH \perp x$ 轴, $FK \perp x$ 轴, 根据平行线分线段成比例得出 $\frac{FG}{GC} = \frac{KH}{CG}$, 即可解答.

【解答】解: (1) $\because A(1, a)$ 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 上, 代入得 $a = \frac{2}{1} = 2$, 即 $A(1, 2)$, 将 $A(1, 2)$ 代入 $y = kx$ 得 $k = 2$, 直线为 $y = 2x$, $\because$ 正比例函数与反比例函数的交点关于原点对称,

$\therefore B(-1, -2)$, 由两点距离公式: $AB = \sqrt{[1 - (-1)]^2 + [2 - (-2)]^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$;

(2) 设 $P(0, p)$, $p > 0$,

分三种情况讨论直角位置:

① $\angle APB = 90^\circ$: 由勾股定理得 $AP^2 + BP^2 = AB^2$,

则 $[1^2 + (2 - p)^2] + [(-1)^2 + (-2 - p)^2] = 20$, 化简得 $p^2 = 5$,

故 $p = \sqrt{5}$ (负值已舍去), 即 $P(0, \sqrt{5})$;

② $\angle PAB = 90^\circ$: 由勾股定理得 $PA^2 + AB^2 = PB^2$,

则 $[1 + (2 - p)^2] + 20 = 1 + (-2 - p)^2$, 解得 $p = \frac{5}{2}$, 即 $P(0, \frac{5}{2})$;

③ $\angle PBA = 90^\circ$: 由勾股定理得 $PB^2 + AB^2 = PA^2$,

则 $20 + [1 + (-2 - p)^2] = 1 + (2 - p)^2$,

解得: $p = -\frac{5}{2}$, 不符合 $p > 0$, 舍去;

综上, 若 $\triangle ABP$ 为直角三角形, 则 $P(0, \frac{5}{2})$ 或 $P(0, \sqrt{5})$;

(3) 根据 (1) 可知 $A(1, 2)$, $\therefore D(0, 2)$, $C(1, 0)$,

设平移距离为 t ($t > 0$), 则平移后各点坐标: $D'(t, 2)$, $C'(1+t, 0)$, $E(1+t, \frac{2}{1+t})$,

设直线 BD' 的解析式为 $y = mx + n$,

代入点 $B(-1, -2)$ 和点 $D'(t, 2)$ 得 $\begin{cases} -2 = -m + n \\ 2 = tm + n \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} m = \frac{4}{t+1} \\ n = \frac{2-2t}{t+1} \end{cases}$

∴直线 BD' 的解析式为 $y = \frac{4x}{t+1} + \frac{2-2t}{t+1}$,

直线 BD' 的解析式与 $y = \frac{2}{x}$ 联立得 $\frac{2}{x} = \frac{4x}{t+1} + \frac{2-2t}{t+1}$, 整理得 $2x^2 + (1-t)x - (t+1) = 0$,

解得: $x = -1$ 或 $x = \frac{t+1}{2}$, ∴点 $F(\frac{t+1}{2}, \frac{4}{t+1})$,

设直线 OE 的解析式为 $y = m'x$,

则 $\frac{2}{1+t} = m'(1+t)$, 解得: $m' = \frac{2}{(1+t)^2}$,

∴直线 OE 的解析式为: $y = \frac{2}{(1+t)^2}x$,

设直线 CF 的解析式为 $y = cx + d$, 则 $\begin{cases} 0 = c(1+t) + d \\ \frac{4}{t+1} = c \cdot \frac{t+1}{2} + d \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} c = -\frac{8}{(1+t)^2} \\ d = \frac{8}{1+t} \end{cases}$,

∴直线 CF 的解析式为 $y = -\frac{8}{(1+t)^2}x + \frac{8}{1+t}$,

联立直线 OE 的解析式和直线 CF 的解析式得 $\frac{2}{(1+t)^2}x =$

$-\frac{8}{(1+t)^2}x + \frac{8}{1+t}$,

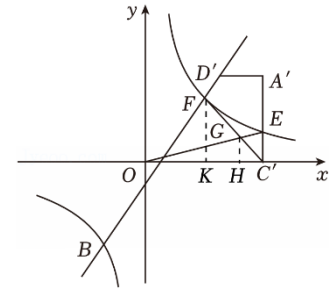
解得: $x = \frac{4(1+t)}{5}$, 即交点 G 的横坐标 $x_G = \frac{4(1+t)}{5}$,

过点 G, F 分别作 $GH \perp x$ 轴, $FK \perp x$ 轴,

则 $GH \parallel FK$, ∴ $\frac{FG}{GC'} = \frac{KH}{C'H}$,

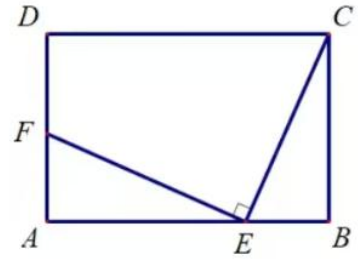
∴ $KH = x_G - x_F = \frac{4(1+t)}{5} - \frac{1+t}{2} = \frac{3(1+t)}{10}$, $C'H = x_C - x_G = (1+t) - \frac{4(1+t)}{5} = \frac{2(1+t)}{5}$,

∴ $\frac{FG}{GC'} = \frac{\frac{3(1+t)}{10}}{\frac{2(1+t)}{5}} = \frac{3}{2}$.



几何部分:

1. 矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=2$, 点 E 为 AB 上一动点, 作 $EF \perp CE$ 交 AD 于点 F , 求 $AE+AF$ 的最大值.



解：设 $AE=x$ ，则 $0 \leq x \leq 3$ 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ$ 。

$\because EF \perp CE$ ， $\therefore \angle AEF + \angle CEB = 90^\circ$ 。

又 $\angle BCE + \angle CEB = 90^\circ$ ， $\therefore \angle AEF = \angle BCE$ 。

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle BCE$ 。

$\therefore AE/BC = AF/BE$ ，即 $x/2 = AF/(3-x)$ 。

$\therefore AF = x(3-x)/2$ 。

$\therefore AE + AF = x + x(3-x)/2 = (-x^2 + 5x)/2$ 。

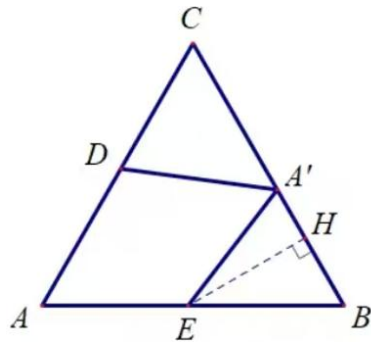
配方得： $= -(1/2)(x - 5/2)^2 + 25/8$ 。

$\because 0 \leq x \leq 3$ ，且 $5/2 \in [0, 3]$ ，

$\therefore$ 当 $x = 5/2$ 时， $AE + AF$ 取得最大值 $25/8$ 。

答： $AE + AF$ 的最大值为 $25/8$ 。

2. 已知等边 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别是边 AC ， AB 上的点，将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 折叠，点 A 的对应点 A' 恰好落在边 BC 上，若 $AB = 2$ ，求 AE 的最小值。



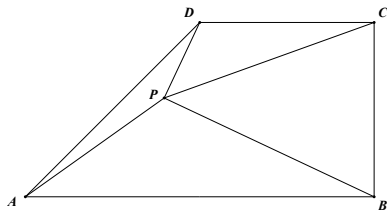
设 $AE = m$ ，则 $A'E = m$ ， $BE = 2 - m$ ，作 $EH \perp BC$ 于 H ，

于是 $EH = BE \times \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - m)$ ，因为 $AE = A'E \geq EH$ ，

所以 $m \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - m)$ ，解得 $m \geq 4\sqrt{3} - 6$ 。

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = 100$ ， $BC = 50$ ， $AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

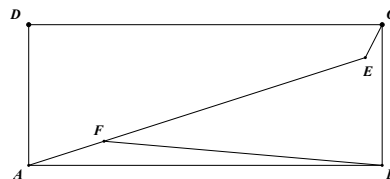
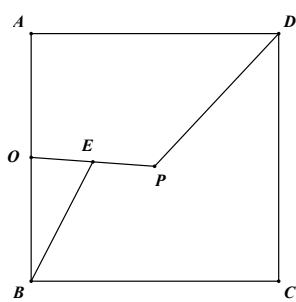
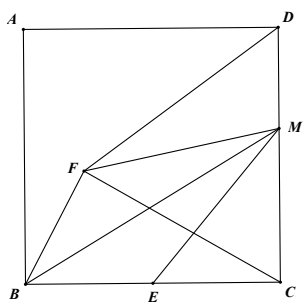
$\angle DAB = 45^\circ$, 则 $CD =$ _____, 其内部有一点 P , 连接 PA, PB, PC, PD , $\angle DPC$ 恒为 45° , 当 $\frac{AP}{BP}$ 取最小值时, $\triangle PCD$ 的面积为 _____.



答案: 50, 750

4. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $AB=2$, E 是 BC 中点, CD 上有一动点 M , 连接 EM, BM , 将 $\triangle BEM$ 沿着 BM 翻折得到 $\triangle BFM$. 连接 DF, CF , 则 $DF + \frac{1}{2}FC$ 的最小值为 _____.

答案: $\frac{5}{2}$



5. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 点 O 为边 AB 的中点, 点 P 是正方形内一动点, 且 $OP=2$, 点 E 为线段 OP 的中点, 连接 DP, BE , 则 $BE + DP$ 的最小值为 _____.

答案: 5

6. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AD=3, AB=8, AE=AB, AF = \frac{1}{4}AE$,

则 $BF + CE$ 的最小值为 _____.

答案: $3\sqrt{5}$