

中考数学模拟试题

一、选择题（本大题 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列是无理数的是()

- A. -1 B. 0 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{2026}$

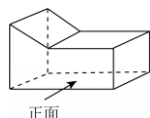
答案：D.

2. 《科学》杂志近期发表的一项成果显示，我国科学家开发出的天文 AI 模型“星衍”，可探测到距地球超过 130 亿光年的星系，其中 130 亿用科学记数法表示为 ()

- A. 0.13×10^{10} B. 1.3×10^{10} C. 1.3×10^9 D. 13×10^9

答案：B.

3. 如图是一个积木玩具的示意图，它的左视图是 ()



- A. B. C. D.

答案：D.

4. 下列运算正确的是 ()

- A. $a^3 + a^3 = a^6$ B. $(-a^2)^3 = a^6$
C. $-x^3 \cdot (-x)^2 \cdot (-x^5) = -x^{10}$ D. $a^3 \cdot a^2 = a^5$

【解答】解： $a^3 + a^3 = 2a^3$ ，故选项 A 错误，不符合题意；

$(-a^2)^3 = -a^6$ ，故选项 B 错误，不符合题意；

$-x^3 \cdot (-x)^2 \cdot (-x^5) = -x^{10}$ ，故选项 C 错误，不符合题意；

$a^3 \cdot a^2 = a^5$ ，故选项 D 正确，符合题意；故选：D.

5. 人工智能大模型在工作中应用越来越广泛，某校数学教研组想在数学教学中引进一款大模型进行辅助教学，为此对比了两款大模型在数学解题中的能力表现，进行了 6 次测试，如表是测试成绩，则下列说法错误的是 ()

大模型 A	90	93	88	90	89	90
大模型 B	91	85	95	95	84	90

- A. 大模型 A 测试成绩的中位数为 89 B. 模型 B 的测试成绩的众数为 95
C. 两款大模型测试得分的平均数相同 D. 大模型 A 的方差比大模型 B 的方差小

【解答】解：首先将大模型 A 成绩从小到大排序，得 88, 89, 90, 90, 90, 93,

$\therefore$ 共 6 个数据，中位数为第 3、4 个数据的平均数，

$\therefore A$ 的中位数为 $\frac{90+90}{2} = 90$ ，故选项 A 说法错误；

对选项 B ，将大模型 B 成绩从小到大排序，得 84, 85, 90, 91, 95, 95，

$\therefore 95$ 出现次数最多， $\therefore B$ 的众数为 95，选项 B 说法正确；

$\therefore A$ 的平均数 $\bar{x}_A = \frac{88+89+90+90+90+93}{6} = 90$ ，

B 的平均数 $\bar{x}_B = \frac{84+85+90+91+95+95}{6} = 90$ ，

$\therefore$ 两款平均数相同，选项 C 说法正确；

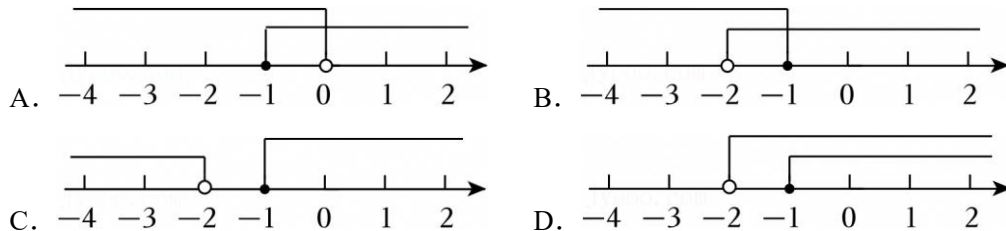
$\therefore S_A^2 = \frac{1}{6}[(88-90)^2 + (89-90)^2 + 3 \times (90-90)^2 + (93-90)^2] = \frac{7}{3}$ ，

$S_B^2 = \frac{1}{6}[(84-90)^2 + (85-90)^2 + (90-90)^2 + (91-90)^2 + 2 \times (95-90)^2] = \frac{56}{3}$ ，

$\therefore S_A^2 < S_B^2$ ，即 A 的方差比 B 的方差小，选项 D 说法正确。

故选：A.

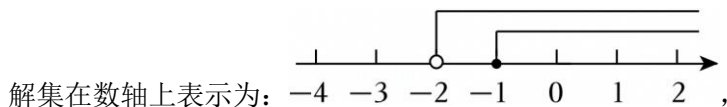
6. 不等式组 $\begin{cases} 3x < 5x + 4 \\ x - 3(x - 2) \leq 8 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



【分析】分别计算出两个不等式的解集，画出数轴即可。

【解答】解：由 $3x < 5x + 4$ 得： $x > -2$ ，

由 $x - 3(x - 2) \leq 8$ 得： $x \geq -1$ ，



$\therefore$ 不等式的解集为： $x \geq -1$ 。

故选：D.

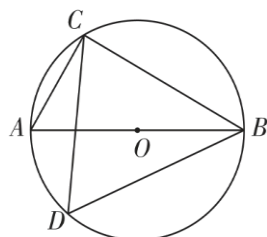
7. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx - 1 = 0$ 的根的情况是 ()

A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根 C. 没有实数根 D. 无法确定

答案: A.

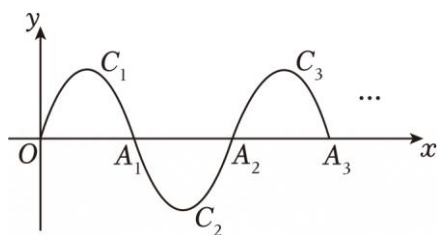
8.如图,AB是 $\odot O$ 的直径,若 $\angle CDB = 60^\circ$,则 $\angle ABC$ 的度数等于()

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°



答案: A

9.如图,一段抛物线 $y = -x(x - 5)$ ($0 \leq x \leq 5$), 记为 C_1 , 它与 x 轴交于点 O , A_1 ; 将 C_1 绕点 A_1 旋转 180° 得 C_2 , 交 x 轴于点 A_2 ; 将 C_2 绕点 A_2 旋转 180° 得 C_3 , 交 x 轴于点 A_3 ; ...如此进行下去, 若 $P(2026, m)$ 是其中某段抛物线上一点, 则 m 为()



A. 4 B. -4 C. -6 D. 6

【分析】根据图象的旋转变化规律以及二次函数的平移规律得出平移后解析式, 进而求出 m 的值.

【解答】解: 由题意可得: C_1 与 x 轴交点坐标为: $O(0, 0)$, $A_1(5, 0)$,

$\therefore$ 将 C_1 绕点 A_1 旋转 180° 得 C_2 , 交 x 轴于点 $A_2(10, 0)$;

将 C_2 绕点 A_2 旋转 180° 得 C_3 , 交 x 轴于点 $A_3(15, 0)$;

...

如此进行下去, 直至得 C_{406} .

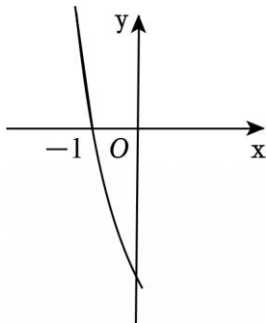
$\therefore C_{406}$ 的解析式与 x 轴的交点坐标为 $A_{405}(2025, 0)$, $A_{406}(2030, 0)$, 且图象在 x 轴下方,

$\therefore C_{406}$ 的解析式为: $y_{406} = (x - 2025)(x - 2030)$,

当 $x = 2026$ 时, $m = (2026 - 2025)(2026 - 2030) = -4$. 故选: B.

10. 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (a 、 b 、 c 为常数, 且 $a \neq 0$) 与 x 轴的两个交点坐标分别为 $(-1, 0)$ 、 $(m, 0)$, 且 $2 < m < 3$. 下列结论: ① $abc > 0$; ② $3a+c > 0$; ③ $-4a < y_{\text{最小值}} < \frac{9a}{4}$;

④ 若方程 $ax^2+bx+c+\frac{1}{2}=0$ 有实数根, 则 $b^2-4ac > a$. 其中正确结论的序号为 ()



A. ①④

B. ②③

C. ①②④

D. ①③④

【解答】解: ① ∵ 抛物线开口向上, $\therefore a > 0$,

$\therefore$ 与 x 轴的两个交点坐标分别为 $(-1, 0)$ 、 $(m, 0)$,

$\therefore$ 对称轴 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1+m}{2}$, $a-b+c=0$, $y = a(x+1)(x-m) = ax^2 + a(1-m)x - am$,

$\therefore b = (1-m)a$, $c = -am$,

$\therefore 2 < m < 3$, $\therefore \frac{1}{2} < \frac{-1+m}{2} < 1$, $\therefore$ 对称轴在 y 轴右侧, $\therefore x = -\frac{b}{2a} > 0$, $\therefore b < 0$,

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交于负半轴, $\therefore c < 0$, $\therefore abc > 0$, 故①正确;

$3a+c = 3a-am = a(3-m)$,

由 $a > 0$ 和 $2 < m < 3$ 可得 $3a+c = a(3-m) > 0$, 故②结论错误;

③ 当 $x = \frac{-1+m}{2}$ 时, 抛物线有最小值, $y_{\text{最小值}} = a(x+1)(x-m) = a(\frac{-1+m}{2}+1)(\frac{-1+m}{2}-m) = -\frac{1}{4}a(m+1)^2$,

$\therefore 2 < m < 3$, $-\frac{1}{4}a < 0$, $\therefore$ 当 $2 < m < 3$ 时, $y_{\text{最小值}} = -\frac{1}{4}a(m+1)^2$ 随 m 增大而减小,

当 $m=2$ 时, $y_{\text{最小值}} = -\frac{9}{4}a$; 当 $m=3$ 时, $y_{\text{最小值}} = -4a$;

$\therefore -4a < y_{\text{最小值}} < -\frac{9a}{4}$, 故③正确;

④ $\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c+\frac{1}{2}=0$ 有实数根,

$\therefore \Delta = b^2 - 4a(c+\frac{1}{2}) \geq 0$, 即 $b^2 - 4ac - 2a \geq 0$, $\therefore b^2 - 4ac \geq 2a$,

$\therefore a > 0$, $\therefore 2a > a$, $\therefore b^2 - 4ac > a$, 故④正确.

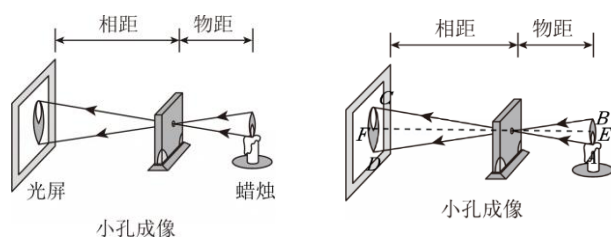
综上所述，正确的结论是①③④．故选：D．

二、填空题（本大题 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

11. 请写出一个使 $\sqrt{5-x}$ 在实数范围内有意义的 x 的值：_____

答案不唯一，满足 $x \leq 5$ 即可．

12. 小华在学习了小孔成像的原理后，利用如图装置来验证小孔成像的现象．已知一根点燃的蜡烛距小孔 20cm ，光屏在距小孔 30cm 处，小华测量了蜡烛的火焰高度为 2cm ，则光屏上火焰所成像的高度为_____ cm ．



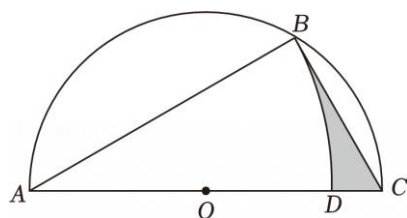
【解答】解：如图， $OE=20\text{cm}$ ， $OF=30\text{cm}$ ， $AB=2\text{cm}$ ，

$\because AB \parallel CD$ ， $\therefore \triangle OAB \sim \triangle OCD$ ， $\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{OE}{OF}$ ，即 $\frac{2}{CD} = \frac{20}{30}$ ， $\therefore CD=3$ （ cm ），

即光屏上火焰所成像的高度为 3cm ．故答案为：3．

13. 清代扬州数学家罗士琳痴迷于勾股定理的研究，提出了推算勾股数的“罗士琳法则”．法则的提出，不仅简化了勾股数的生成过程，也体现了中国传统数学在数论领域的贡献．由此法则写出了下列几组勾股数：①3, 4, 5；②5, 12, 13；③7, 24, 25；④9, 40, 41…… 根据上述规律，写出第⑤组勾股数：_____．

14. 如图， AC 为半圆 O 的直径， B 为半圆 O 上的一点，连接 AB ， BC ，以点 A 为圆心， AB 的长为半径画弧，交 AC 于点 D ．若 $BC=2$ ， $AC=4$ ，则阴影部分的面积为_____．（结果保留 π ）



【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC=2$ ， $AC=4$ ， $\therefore \angle A=30^\circ$ ，

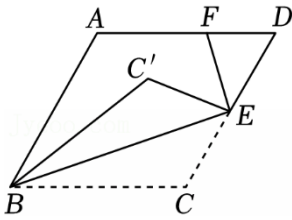
$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 扇形的圆心角为 $\angle A=30^\circ$ ，半径为 $AB=2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore S_{\text{扇形}ABD} = \frac{n\pi r^2}{360} = \frac{30\pi \times (2\sqrt{3})^2}{360} = \frac{30\pi \times 12}{360} = \pi,$$

$\therefore$ 阴影部分面积 $= S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形}ABD} = 2\sqrt{3} - \pi$. 故答案为: $2\sqrt{3} - \pi$.

15. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle C=120^\circ$ ， $AB=4$ ， E 是 CD 上一点，将 $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠得到 $\triangle BC'E$ ， EF 平分 $\angle C'ED$ 交 AD 于点 F ，当 B, C', F 三点共线时， BF 的长为 _____ .



【解答】解：过点 E 作 $EH \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 H ，如图所示

$$\therefore \angle H = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle BCD = 120^\circ$ ， $AB = 4$ ，

$$\therefore BC = CD = AB = 4, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle D = 180^\circ - \angle BCD = 60^\circ, \angle ECH = 180^\circ - \angle BCD = 120^\circ = 60^\circ,$$

由折叠性质得： $C'E = CE$ ， $\angle C'EB = \angle CEB$ ， $\angle C'BE = \angle CBE$ ， $\angle BCE = \angle BCD = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle C'EC = \angle C'EB + \angle CEB = 2\angle C'EB,$$

$\therefore$ 当 B, C', F 三点共线时，则 $\angle FBE = \angle HBE$ ， $\angle EC'F = 180^\circ - \angle BCE = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle EC'F = \angle D = 60^\circ,$$

$\therefore EF$ 平分 $\angle C'ED$ 交 AD 于点 F ， $\therefore \angle C'EF = \angle DEF$ ，

$$\therefore \angle C'ED = \angle C'EF + \angle DEF = 2\angle C'EF,$$

$\therefore$ 点 E 是 CD 上一点， $\therefore \angle C'EC + \angle C'ED = 2\angle C'EB + 2\angle C'EF = 180^\circ$ ，

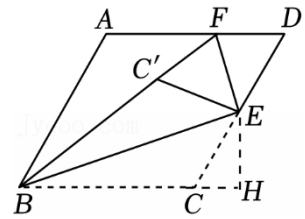
$$\therefore \angle C'EB + \angle C'EF = 90^\circ, \therefore \angle BEF = \angle C'EB + \angle C'EF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle H = 90^\circ, \text{在} \triangle EC'E \text{和} \triangle EDF \text{中}, \begin{cases} \angle EC'F = \angle D \\ \angle C'EF = \angle DEF \\ EF = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EC'E \cong \triangle EDF \text{ (AAS)}, \therefore C'E = DE,$$

$$\text{又} \because C'E = CE, \therefore CE = DE, \therefore CD = DE + CE = 2CE = 4, \therefore CE = 2,$$

$$\text{在} \triangle ECH \text{中}, \angle H = 90^\circ, \angle ECH = 60^\circ, \therefore \angle CEH = 30^\circ, \therefore CH = \frac{1}{2}CE = 1,$$



由勾股定理得: $EH = \sqrt{CE^2 - CH^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$,

在 $\triangle BHE$ 中, $\angle H = 90^\circ$, $BH = BC + CH = 5$,

由勾股定理得: $BE = \sqrt{BH^2 + EH^2} = \sqrt{5^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$,

在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle BHE$ 中, $\angle FBE = \angle HBE$, $\angle BEF = \angle H = 90^\circ$,

$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BHE$, $\therefore \frac{BF}{BE} = \frac{BE}{BH}$, $\therefore \frac{BF}{2\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$, $\therefore BF = \frac{28}{5}$. 故答案为: $\frac{28}{5}$.

三、解答题 (一) (共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

16. 先化简, 再求值: $(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x}) \div \frac{x^2+2x+1}{x^2}$, 其中 $x=2$.

【分析】 先通分括号内, 再运算除法, 化简, 得 $\frac{x}{x+1}$, 最后把 $x=2$ 代入 $\frac{x}{x+1}$ 进行计算, 即可作答.

【解答】 解: 原式 $= \frac{x^2-1}{x^2-x} \div \frac{x^2+2x+1}{x^2}$
 $= \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} \div \frac{(x+1)^2}{x^2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}$,

把 $x=2$ 代入 $\frac{x}{x+1}$, 得 $\frac{x}{x+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$.

17. 综合与实践: 在学习了平行四边形后, 某数学学习小组利用尺规作图进行了拓展性探究.

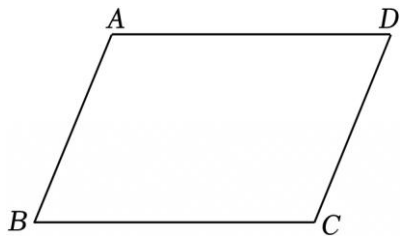
【动手操作】 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB < BC$. 用尺规完成基本作图: 作出 $\angle ABC$ 的平分线, 交 AD 于点 E .

【问题提出】 他们猜想 DE , BC , AB 之间存在以下数量关系: $DE = BC - AB$.

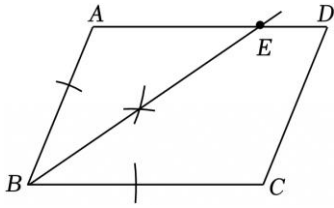
【问题解决】 任务:

(1) 请你按照要求完成作图 (保留作图痕迹, 不写作法);

(2) 请帮助该学习小组完成以上猜想的证明.

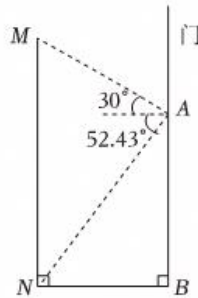


【解答】 (1) 解: 如图, BE 即所求;



(2) 证明：在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ， $\therefore \angle AEB = \angle CBE$ ，
 $\because AE$ 平分 $\angle ABC$ ， $\therefore \angle ABE = \angle CBE$ ， $\therefore \angle ABE = \angle AEB$ ， $\therefore AB = AE$ ，
 $\therefore DE = AD - AE$ ， $\therefore DE = BC - AB$ 。

18. 尊老敬老是中华民族的传统美德。某社区开展了“智慧助老”行动，为高龄老年人家庭免费安装智能门锁。如图，在侧面示意图中，智能门锁的摄像头 A 拍摄的最大仰角为 30° ，最大俯角为 52.43° ，某人站在门外距离门底部 B 点 0.9 米的 N 处时，摄像头 A 恰好能拍摄到站立点 N 及头顶 M 。已知 $AB \perp BN$ ， $MN \perp BN$ ，求此人的头顶 M 到站立点 N 的距离。（结果精确到 0.01 米；参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sin 52.43^\circ \approx 0.793$ ， $\cos 52.43^\circ \approx 0.610$ ， $\tan 52.43^\circ \approx 1.300$ ）



【解答】解：过点 A 作 $AC \perp MN$ ，垂足为 C ，

由题意得： $AC = BN = 0.9$ 米，

在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中， $\angle MAC = 30^\circ$ ，

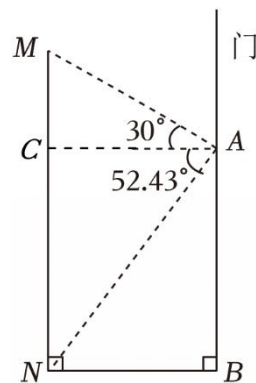
$$\therefore CM = AC \cdot \tan 30^\circ \approx 0.9 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.3\sqrt{3} \text{ (米)},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACN$ 中， $\angle CAN = 52.43^\circ$ ，

$$\therefore CN = AC \cdot \tan 52.43^\circ \approx 0.9 \times 1.3 = 1.17 \text{ (米)},$$

$$\therefore MN = CM + CN = 0.3\sqrt{3} + 1.17 \approx 1.69 \text{ (米)},$$

$\therefore$ 此人的头顶 M 到站立点 N 的距离约为 1.69 米。



四、解答题（二）（本大题 3 小题，每小题 9 分，共 27 分）

19. 安居“524”红薯是国家质检总局批准的地理标志保护产品。根据市场需求，合作社将“524”

红薯制成“红薯粉条”和“红薯淀粉”两类产品，用于旅游特产销售．经了解，“红薯粉条”比“红薯淀粉”每袋多卖 4 元，且用 30 元购买“红薯粉条”的袋数与用 18 元购买“红薯淀粉”的袋数相等．

(1) 求“红薯粉条”和“红薯淀粉”每袋分别售价多少元？

(2) 某游客计划购买这两类产品（两类都有），恰好用完 100 元．请问该游客有哪几种购买方案？

【解答】解：(1) 设每袋“红薯粉条”的售价是 x 元，则每袋“红薯淀粉”的售价是 $(x - 4)$ 元，

根据题意得： $\frac{30}{x} = \frac{18}{x-4}$ ，解得： $x=10$ ，

经检验， $x=10$ 是所列方程的解，且符合题意， $\therefore x - 4 = 10 - 4 = 6$ ．

答：每袋“红薯粉条”的售价是 10 元，每袋“红薯淀粉”的售价是 6 元；

(2) 设购买 m 袋“红薯粉条”， n 袋“红薯淀粉”，

根据题意得： $10m+6n=100$ ， $\therefore m=10-\frac{3}{5}n$ ，

又： m, n 均为正整数， $\therefore \begin{cases} m=7 \\ n=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=4 \\ n=10 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=1 \\ n=15 \end{cases}$ ，

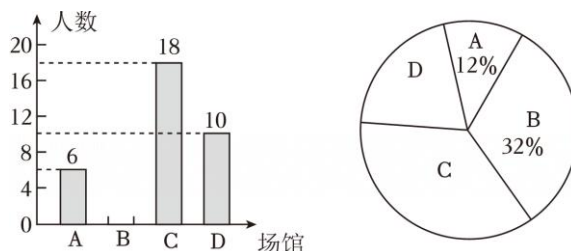
$\therefore$ 该游客共有 3 种购买方案，

方案 1：购买 7 袋“红薯粉条”，5 袋“红薯淀粉”；

方案 2：购买 4 袋“红薯粉条”，10 袋“红薯淀粉”；

方案 3：购买 1 袋“红薯粉条”，15 袋“红薯淀粉”．

20. 深圳教育秉承“以万物为教材、把世界作课堂”的核心理念，某校八年级开展“每周半天”计划活动，需从以下四个场馆中随机选择一个开展活动： A 光明欢乐田园、 B 航天农业科技示范园、 C 深圳湾实验室、 D 深圳市博物馆，现从八年级同学们进行最想去的场馆抽样问卷调查，每个同学仅能从上面 4 个场馆中选择一个，且都选了一个，根据调查结果绘制了下面不完整的条形统计图和扇形统计图．



根据图中所给信息解答下列问题：

(1) 此次抽样调查共有_____人；

(2) 补全条形统计图，并计算选择深圳市博物馆的同学所在扇形圆心角度数为_____；

(3) 若该校八年级有 1000 名学生，估计该校八年级学生想去航天农业科技示范园的有多少人；

(4) 该学校八年级(1)班想从上面 4 个场馆中随机选两个参观，请用列表或画树状图的方法，求恰好选择深圳市博物馆和深圳湾实验室的概率。

【解答】解：(1) 由题意得，此次抽样调查共有 $6 \div 12\% = 50$ (人)。故答案为：50。

(2) 选择 B 的人数为 $50 \times 32\% = 16$ (人)。

补全条形统计图如图所示。

选择深圳市博物馆的同学所在扇形圆心角度数为 $360^\circ \times \frac{10}{50} = 72^\circ$ 。

故答案为： 72° 。

(3) $1000 \times 32\% = 320$ (人)。

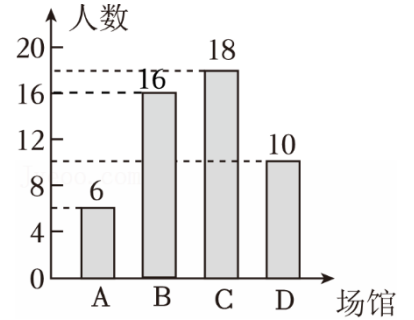
答：估计该校八年级学生想去航天农业科技示范园的约有 320 人。

(4) 列表如下：

	A	B	C	D
A		(A, B)	(A, C)	(A, D)
B	(B, A)		(B, C)	(B, D)
C	(C, A)	(C, B)		(C, D)
D	(D, A)	(D, B)	(D, C)	

共有 12 种等可能的结果，其中恰好选择深圳市博物馆和深圳湾实验室的结果有：(C,

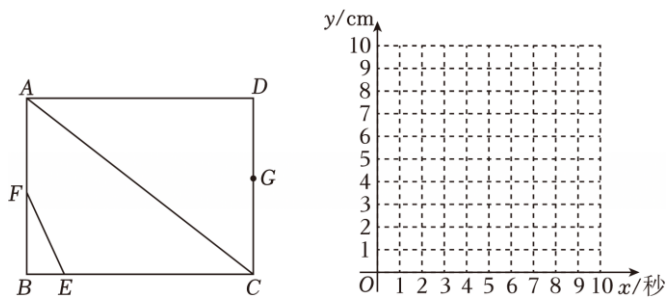
D), (D, C)，共 2 种， $\therefore$ 恰好选择深圳市博物馆和深圳湾实验室的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。



21. 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB=6\text{cm}$ ， $BC=8\text{cm}$ 。点 E 以每秒 1cm 的速度沿 $B \rightarrow C$ 方向运动，点 F 在直线 AB 上运动，且满足 $S_{\triangle BEF} = 2\text{cm}^2$ 。点 G 与点 E 同时出发，以每秒 2cm 的速度沿折线 $D \rightarrow C \rightarrow A$ 方向运动。设运动时间为 x 秒 ($0 < x < 8$)，点 F 与点 B 的距离为 y_1 ，点 G 与点 C 的距离为 y_2 。

(1) 请直接写出 y_1 , y_2 关于 x 的函数表达式，并分别写出自变量 x 的取值范围；

(2) 请在给定的平面直角坐标系中画出函数 y_1 , y_2 的图象；结合函数图象，直接写出 $y_1 < y_2$ 时 x 的取值范围 (近似值保留小数点后一位，误差不超过 0.2)。



【分析】(1) 求 y_1 的函数表达式: 先根据点 E 的运动速度得到 $BE=x$, 再根据 $\angle B=90^\circ$, 将直角边 BE 和 BF 代入三角形面积公式, 可得出 BF 即 y_1 的表达式; 根据点 G 沿 $D \rightarrow C \rightarrow A$ 运动, G 速度为 2cm/s , 当 $0 < x \leq 3$ 时, $y_2=6-3x$, 当 $3 < x < 8$ 时, $y_2=2(x-3)=2x-6$, 分两种情况解答;

(2) 根据 y_1 , y_2 的函数类型和自变量取值范围, 列表, 描点, 连线, 画出图象.

【解答】解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB=6\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$.

$\therefore \angle B=90^\circ$, $\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 10(\text{cm})$,

$\because$ 点 E 以每秒 1cm 的速度沿 $B \rightarrow C$ 方向运动, 点 F 在直线 AB 上运动, 且满足 $S_{\triangle BEF} = 2\text{cm}^2$, 运动时间 x 秒, $\therefore BE=x\text{cm}$,

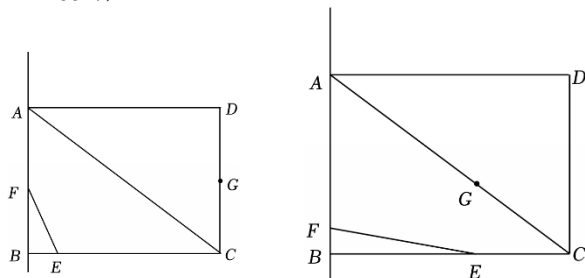
$\therefore S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2}BE \cdot BF = \frac{1}{2}xy_1$, $\therefore \frac{1}{2} \cdot x \cdot y_1 = 2$, $\therefore y_1 = \frac{4}{x} (0 < x < 8)$;

$\because$ 点 G 沿 $D \rightarrow C \rightarrow A$ 运动, G 速度为 2cm/s , $DC=AB=6\text{cm}$,

$\therefore$ 当 $0 < x \leq 3$ 时, $y_2=6-2x$,

当 $3 < x < 8$ 时, $y_2=2(x-3)=2x-6$,

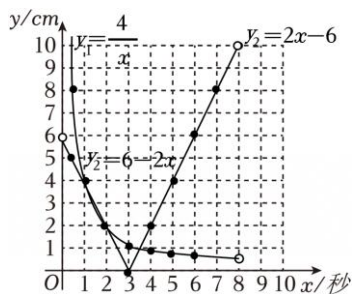
综上, $y_2 = \begin{cases} 6-2x (0 < x \leq 3) \\ 2x-6 (3 < x < 8) \end{cases}$;



(2) 列表:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	8
y_1		8	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
y_2	6	5	4	2	0	2	4	6	10

以表中每对 x , y_1 的值和 x , y_2 的值作为点的坐标在平面直角坐标系中描点, 用顺滑的线依次连接各点, 得到 y_1 和 y_2 的图象.



由图象看出当 $y_1 < y_2$ 时, $1 < x < 2$ 或 $3.6 < x < 8$.

五、解答题（三）（本大题 2 小题，第 22 题 13 分，第 23 题 14 分，共 27 分）

22. 问题解决：【实际情境】某科技公司在筹备一场盛大的无人机灯光秀，为确保表演效果与安全，技术人员需要用电脑软件给每架无人机绘制飞行路线（下列出现的无人机只向右飞行）。

【数学建模】无人机甲在试飞阶段的飞行轨迹可抽象为抛物线 C 的一部分，飞行轨迹最高点距地面 $3m$ ，起飞点 O 和降落点 E （都在水平地面上）的距离为 $8m$ ，以 O 为原点， OE 所在直线为 x 轴，过点 O 多少与水平地面垂直的直线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系。

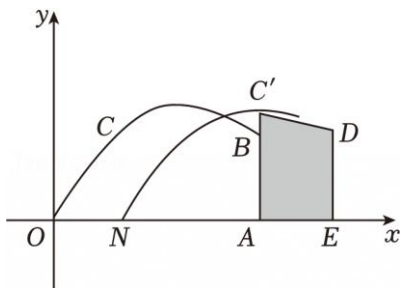
（1）求抛物线 C 的关系式；

【问题解决】

（2）无人机在越过障碍物时，与障碍物的上表面的每个点在竖直方向上的距离不少于 $0.15m$ ，才能安全通过。如图，在水平地面上放置了一个设备，该设备的纵切面为四边形 $ABDE$ ，其中 $AB = 2.85m$ ， $AE = 2m$ ， $DE = 2.4m$ ， $\angle BAE = \angle DEA = 90^\circ$ 。无人机乙原计划从距离 AB 左侧 $4m$ 的点 $N(2, 0)$ 处起飞（其飞行轨迹抛物线 C' 与抛物线 C 的形状和最高点距地面的高度均相同），发现不能安全越过障碍物。若该公司人员在起飞点 N 处放置一个平台，无人机乙从平台上的点 $M(MN \perp x$ 轴) 处起飞后刚好安全通过障碍物，此时无人机乙的飞行轨迹记为抛物线 C'' 。

①求该平台的高度 MN ；

②求当 $2 \leq x \leq 8$ 时，在平台点 M 处起飞的无人机乙的飞行路线与无人机甲的试飞路线在 x 相同时的最大高度差。



【解答】解：（1）根据题意得：抛物线 C 的顶点坐标为 $(4, 3)$ ，

可设抛物线 C 的关系式为 $y = a(x - 4)^2 + 3$ ，

将点 $(0, 0)$ 代入，得： $0 = a(0 - 4)^2 + 3$ ，解得： $a = -\frac{3}{16}$ ，

$\therefore$ 抛物线 C 的关系式为 $y = -\frac{3}{16}(x - 4)^2 + 3$ ；

（2）①根据题意可设抛物线 C' 的关系式为 $y = -\frac{3}{16}(x - 4 - 2)^2 + 3 + h = -\frac{3}{16}(x - 6)^2 + 3 + h$ ，

$\therefore OE = 8m$ ， $AE = 2m$ ， $AB = 2.85m$ ， $\therefore OA = OE - AE = 6m$ ， $B(6, 2.85)$ ，

$\therefore$ 此时点 B 正好在抛物线 C' 最高点的下方，与最高点的距离超过 $0.15m$ ，

由题意可知：点 D 的坐标为 $(8, 2.4)$ ， $2.4 + 0.15 = 2.55$ ，

$\therefore$ 无人机乙从平台上的点 M 处起飞后刚好安全通过障碍物， $(8, 2.55)$ 恰好在抛物线 C' 上，

将点 $(8, 2.55)$ 代入 $y = -\frac{3}{16}(x - 6)^2 + 3 + h$ 得： $2.55 = -\frac{3}{16}(8 - 6)^2 + 3 + h$ ，解得 $h = 0.3$ ，即该平台的高度 MN 为 $0.3m$ ；

②由①得抛物线 C' 的关系式为 $y = -\frac{3}{16}(x - 6)^2 + 3.3$ ，

当 $-\frac{3}{16}(x - 6)^2 + 3.3 = -\frac{3}{16}(x - 4)^2 + 3$ 时，解得 $x = \frac{23}{5}$ ，

结合图象可得，

当 $2 \leq x < \frac{23}{5}$ 时，在 $x = 2$ 时，有最大高度差，此时高度差为 $\frac{39}{20}$ ，

当 $\frac{23}{5} < x \leq 8$ 时，在 $x = 8$ 时，有最大高度差，高度差为 $\frac{51}{20}$ ，

$\therefore$ 最大高度差为 $\frac{51}{20}$ 。

23. 定义：把有一组邻边相等，并且对角也互补的四边形叫作“求同存异四边形”。

【定义感知】：如图 1，四边形 $ABCD$ 中，若 $AD = CD$ ， $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ，则四边形 $ABCD$ 叫作“求同存异四边形”。

【理解应用】(1) ①在以下四种图形中，一定是“求同存异四边形”的是_____；

A. 平行四边形 B. 菱形 C. 正方形 D. 矩形

②“求同存异四边形 $ABCD$ ”中，若 $\angle B = 35^\circ$ ，则 $\angle D =$ _____；

(2) 如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 交于点 E ，若 BD 垂直平分 AC ，且 $\frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是“求同存异四边形”；

【拓展延伸】(3) 如图 3，在 $\odot O$ 中， BD 为直径， A, C 分别为 $\odot O$ 上的两个动点，使得四边形 $ABCD$ 为“求同存异四边形”，对角线 AC, BD 交于点 E ，若 $BD = 2, AC = x, \frac{AC}{CE} + AB + AD = y$ ，直接写出 y 与 x 的函数关系式。

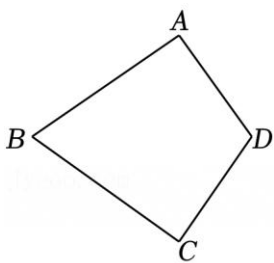


图1

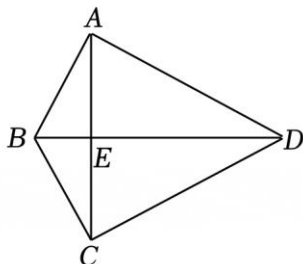


图2

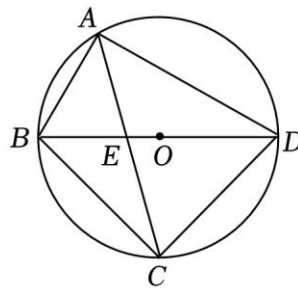


图3

【解答】(1) 解：① $\because$ 平行四边形的对角相等，不一定互补， $\therefore A$ 选项不符合题意；

$\because$ 菱形是四条边相等，对角相等，但对角不一定互补， $\therefore B$ 选项不符合题意；

$\because$ 正方形的四条边相等，四个角为直角，满足有一组邻边相等，并且对角也互补的条件，

$\therefore C$ 选项符合题意；

$\because$ 矩形的四个角为直角，不满足有一组邻边相等的条件， $\therefore D$ 选项不符合题意。

综上，符合题意的选项为 C 。故答案为： C ；

② $\because$ “求同存异四边形 $ABCD$ ”的对角也互补， $\angle B = 35^\circ$ ，

$\therefore \angle D = 180^\circ - \angle B = 145^\circ$ 。故答案为： 145° 。

(2) 证明： $\because BD$ 垂直平分 AC ，

$\therefore AB = CB, AD = CD, AE = CE, \angle BEA = \angle AED = 90^\circ$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中， $\begin{cases} AB = CB \\ BD = BD \\ AD = CD \end{cases}$ ， $\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SSS)， $\therefore \angle BAD = \angle BCD$ ，

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}, \therefore \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{AE}$ ，

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DAE, \therefore \angle BAE = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAE + \angle EAD = \angle ADE + \angle EAD = 180^\circ - \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ, \therefore \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是“求同存异四边形”;

(3) 解: $\because BD$ 为直径, $\therefore \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$. 四边形 $ABCD$ 为“求同存异四边形”,

① 当 $BA = BC$ 时, 如图, $\because BA = BC, \therefore \widehat{BA} = \widehat{BC}$,

$\because BD$ 为直径, $\therefore OE \perp AC$,

$$\therefore CE = AE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}x, \therefore \frac{AC}{CE} = 2.$$

$\because \angle BAD = 90^\circ, OE \perp AC$,

$$\therefore AB^2 + AD^2 = BD^2 = 4, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2}BD \cdot AE,$$

$$\therefore AB \cdot AD = BD \cdot AE = 2 \times \frac{1}{2}x = x,$$

$$\therefore AB + AD = \sqrt{(AB + AD)^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD} = \sqrt{2x + 4}, \therefore y = \sqrt{2x + 4} + 2;$$

② 当 $AB = AD$ 时, 如图, 则 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AB = AD = \frac{\sqrt{2}}{2}BD = \sqrt{2}. \therefore \widehat{AB} = \widehat{AD}, \therefore \angle ACB = \angle ABD = 45^\circ,$$

$\because \angle BAE = \angle CAB, \therefore \triangle ABE \sim \triangle ACB$,

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AB}, \therefore \frac{\sqrt{2}}{AE} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \therefore AE = \frac{2}{x},$$

$$\therefore CE = AC - AE = x - \frac{2}{x}, \therefore \frac{AC}{CE} = \frac{x}{x - \frac{2}{x}} = \frac{x^2}{x^2 - 2},$$

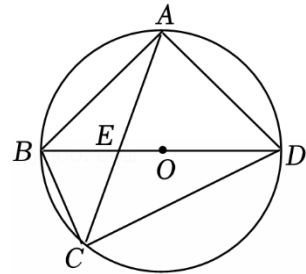
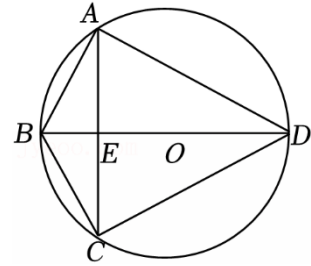
$$\therefore y = \frac{x^2}{x^2 - 2} + 2\sqrt{2}.$$

③ 当 $CB = CD$ 时, 延长 AB 至点 F , 使 $BF = AD$, 连接 FC , 如图,

$$\because CB = CD, \angle BCD = 90^\circ, \therefore \widehat{CB} = \widehat{CD}, BC = CD = \sqrt{2},$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC = 45^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为圆的内接四边形, $\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$,



$$\because \angle FBC + \angle ABC = 180^\circ, \therefore \angle FBC = \angle ADC,$$

$$\text{在} \triangle FBC \text{ 和} \triangle ADC \text{ 中, } \begin{cases} FB = AD \\ \angle FBC = \angle ADC \\ BC = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FBC \cong \triangle ADC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle F = \angle DAC = 45^\circ, \therefore \angle F = \angle BAC = 45^\circ,$$

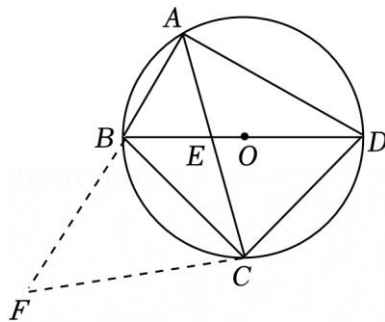
$$\therefore \triangle AFC \text{ 为等腰直角三角形, } \therefore AF = \sqrt{2}AC = \sqrt{2}x.$$

$$\therefore AB + AD = AB + BF = AF, \therefore AB + AD = \sqrt{2}x.$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CAB = 45^\circ, \angle BCE = \angle ACB, \therefore \triangle BCE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{AC}{BC}, \therefore \frac{\sqrt{2}}{CE} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \therefore CE = \frac{2}{x}, \therefore \frac{AC}{CE} = \frac{x}{\frac{2}{x}} = \frac{x^2}{2}, \therefore y = \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x.$$

$$\text{综上, } y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = \sqrt{2x+4} + 2 \text{ 或 } y = \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x \text{ 或 } y = \frac{x^2}{x^2-2} + 2\sqrt{2}.$$



附加题:

1. (2026 南充) 已知抛物线 $y = -(x-t)^2 + 1$ (t 为常数).

(1) 若抛物线过点 $(-3, m)$, $(1, m)$, 求 t 的值.

(2) 抛物线与 x 轴交于 A, B 两点, 点 $P(2t-1, 0)$ 为线段 AB 上一点, 过点 P 作 x 轴垂线, 分别与抛物线和直线 $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 交于点 M, N , 求 MN 最大值.

(3) 点 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$ 都在抛物线上, 当 $-2t-1 \leq x_1 \leq -2t$, $2 \leq x_2 \leq 4$ 时, 都有 $y_1 < y_2$, 求 t 的取值范围.

【分析】 (1) 根据抛物线的对称性可进行求解;

(2) 由题意易得 $M(2t-1, -t^2+2t)$, $N(2t-1, -t-\frac{5}{2})$, 然后可得 $MN = |-(t-\frac{3}{2})^2 + \frac{19}{4}|$, 进而根据二次函数的性质进行求解即可;

(3) 由题意可知抛物线的对称轴为直线 $x=t$, 开口向下, 则可分: ①当 $t > 4$ 时, ②当 $2 < t \leq 4$ 时, ③当 $0 \leq t \leq 2$ 时, ④当 $t < 0$ 时, 然后分类进行求解即可.

【解答】 解: (1) 由抛物线 $y = -(x-t)^2 + 1$ 可知: 对称轴为直线 $x=t$,

$\therefore$ 抛物线过点 $(-3, m)$, $(1, m)$, $\therefore$ 这两点关于对称轴对称, 即 $t = \frac{-3+1}{2}$, $\therefore t = -1$;

(2) 令 $y=0$, 则有 $-(x-t)^2 + 1 = 0$, 解得: $x_1 = t+1$, $x_2 = t-1$,

∴抛物线与 x 轴的交点横坐标为 $t+1, t-1$,

∴点 $P(2t-1, 0)$ 为线段 AB 上一点, ∴ $t-1 \leq 2t-1 \leq t+1$, 解得: $0 \leq t \leq 2$,

∴过点 P 作 x 轴垂线, 分别与抛物线和直线 $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 交于点 M, N , 且 $P(2t-1, 0)$,

∴ $M(2t-1, -t^2+2t), N(2t-1, -t-\frac{5}{2})$,

∴ $MN = |-t^2+2t - (-t-\frac{5}{2})| = |-t^2+3t+\frac{5}{2}| = |-(t-\frac{3}{2})^2 + \frac{19}{4}|$,

∵ $-1 < 0$, ∴当 $t = \frac{3}{2}$ 时, $-(t-\frac{3}{2})^2 + \frac{19}{4}$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{19}{4}$, ∴ MN 的最大值为 $\frac{19}{4}$;

(3) 由题意可知抛物线的对称轴为直线 $x=t$, 开口向下,

∴当 $x > t$ 时, y 随 x 的增大而减小, 当 $x < t$ 时, y 随 x 的增大而增大,

根据题意可知: 当 $-2t-1 \leq x_1 \leq -2t, 2 \leq x_2 \leq 4$ 时, y_2 的最小值应大于 y_1 的最大值,

分析抛物线对称轴 $x=t$ 与 $x=2$ 和 $x=4$ 时三种关系,

①当 $t > 4$ 时, 如图,

由图可知: $-2t-1 < t, -2t < t$, 此时都有 $y_1 < y_2$;

②当 $2 < t \leq 4$ 时, 且当 $3 < t \leq 4$ 时, 此时当 $x_2=2$ 时, y_2

取得最小值, 当 $x_1 = -2t$ 时, y_1 取得最大值,

∴ $t-2 < t - (-2t)$,

解得: $t > -1$,

∴当 $3 < t \leq 4$ 时, $y_1 < y_2$ 恒成立,

当 $2 < t \leq 3$ 时, 如图,

由图可知: $-2t-1 < t, -2t < t$,

y_1 在 $x_1 = -2t$ 上取得最大值, y_2 在 $x_2=4$ 上取得最小值,

∴ $4-t < t - (-2t)$,

解得: $t > 1$,

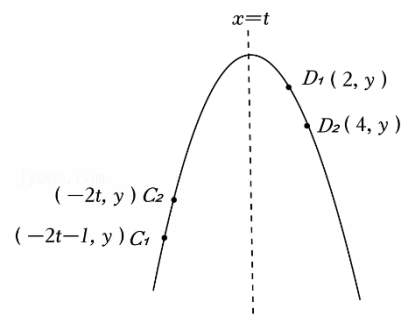
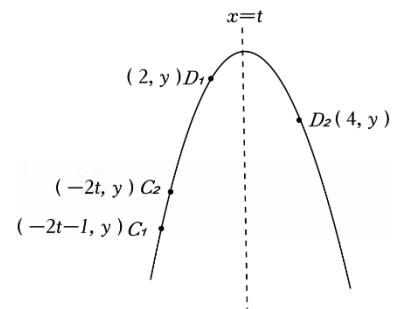
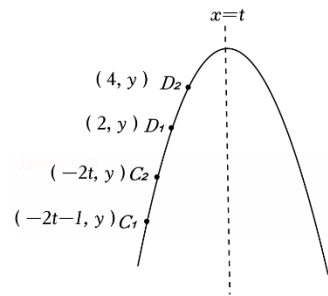
∴当 $2 < t \leq 4$ 时, 都有 $y_1 < y_2$;

③当 $0 \leq t \leq 2$ 时, 如图,

由图可知: $-2t-1 < t, -2t < t$,

y_1 在 $x_1 = -2t$ 上取得最大值, y_2 在 $x_2=4$ 上取得最小值,

∴ $4-t < t - (-2t)$, 解得: $t > 1$,



∴当 $1 < t \leq 2$ 时, 都有 $y_1 < y_2$;

④当 $t < 0$ 时, 则 $-2t > 0$,

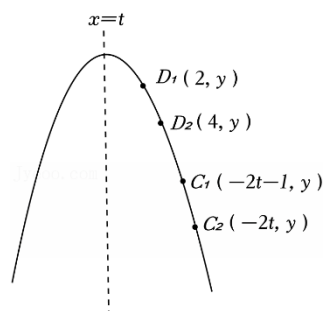
若 $-2t - 1 < t$ 时, 则 y_1 的最大值大于 y_2 , 即 $y_1 < y_2$ 不成立,

若 $-2t - 1 > t$ 时, 如图,

∴当 $x_1 = -2t - 1$ 时, 点 C 的纵坐标取得最大值, 当 $x_2 = 4$ 时, 点 D 的纵坐标取得最小值,

∴ $-2t - 1 > 4$, 解得: $t < -\frac{5}{2}$;

综上所述: 的取值范围为 $t < -\frac{5}{2}$ 或 $t > 1$.



2. (2026 泸州) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + 1$.

(1) 若该二次函数的图象经过点 $(3, 4)$, 且关于直线 $x = 1$ 对称, 求二次函数的解析式;

(2) 当 $a = \frac{2}{3}$ 时, 该二次函数的图象与 x 轴分别交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 且 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(3) 当 $b = 1$ 时, 点 $D(1, y_1), E(2, y_2)$ 在该二次函数的图象上, 若 $y_1 > y_2$, 求二次函数在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值 m 的取值范围.

【分析】(1) 根据待定系数法进行求解即可;

(2) 由题意易得 $C(0, 1)$, 设该二次函数的图象与 x 轴的交点坐标分别为 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$, 当 $y = 0$ 时, 则有 $\frac{2}{3}x^2 + bx + 1 = 0$ 那么 x_1, x_2 是该方程的两个不等实数根, 根据根与系数的关系可得: $x_1x_2 = \frac{3}{2}$, 然后根据两点间距离公式及等腰三角形的定义进行求解即可;

(3) 由题意易得 $y = ax^2 + x + 1$ 然后根据 $y_1 > y_2$ 可得 $a < -\frac{1}{3}$, 则有该二次函数的对称轴范围为 $0 < -\frac{1}{2a} < \frac{3}{2}$, 进而根据二次函数的性质分类讨论即可.

【解答】解: (1) ∵该二次函数 $y = ax^2 + bx + 1$ 的对称轴为直线 $x = 1$,

∴ $x = -\frac{b}{2a} = 1$, 即 $b = -2a$,

∵该二次函数的图象经过点 (3, 4), ∴ $9a+3b+1=4$,

把 $b = -2a$ 代入得: $9a+3 \times (-2a)+1=4$, 解得: $a=1$, ∴ $b=-2$,

∴该二次函数的解析式为 $y=x^2-2x+1$;

(2) 当 $a = \frac{2}{3}$ 时, 则有 $y = \frac{2}{3}x^2 + bx + 1$,

令 $x=0$, 则有 $y=1$, 即 $C(0, 1)$, ∴ $OC=1$,

设该二次函数的图象与 x 轴的交点坐标分别为 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$,

不妨设 $x_1 < x_2$, 当 $y=0$ 时, 则有 $\frac{2}{3}x^2 + bx + 1 = 0$,

那么 x_1, x_2 是该方程的两个不等实数根, ∴根据根与系数的关系可得: $x_1x_2 = \frac{3}{2}$,

∴根据两点间距离公式可得: $AC^2 = (x_1 - 0)^2 + (0 - 1)^2 = x_1^2 + 1$,

$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 - 2 \times \frac{3}{2} + x_2^2 = x_1^2 - 3 + x_2^2$

$BC^2 = (x_2 - 0)^2 + (0 - 1)^2 = x_2^2 + 1$,

当该二次函数的图象与 x 轴分别交于 A, B 两点, 且在 y 轴的右侧,

∵ $\triangle ABC$ 是等腰三角形, ∴ $AC=AB$,

∴ $x_1^2 + 1 = x_1^2 - 3 + x_2^2$, 解得: $x_2=2$ (负根舍去),

∴把 $x_2=2$ 代入 $\frac{2}{3}x^2 + bx + 1 = 0$ 得: $\frac{2}{3} \times 4 + 2b + 1 = 0$, 解得: $b = -\frac{11}{6}$,

∴ $\frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{6}x + 1 = 0$, 解得: $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 2$, ∴ $AB = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$, ∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = \frac{5}{8}$,

当该二次函数的图象与 x 轴分别交于 A, B 两点, 且在 y 轴的左侧,

∵ $\triangle ABC$ 是等腰三角形, ∴ $BC=AB$,

同理可得: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = \frac{5}{8}$; 综上所述: $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{5}{8}$.

(3) 当 $b=1$ 时, 则有 $y=ax^2+x+1$,

∵点 $D(1, y_1)$ $E(2, y_2)$ 在该二次函数的图象上, ∴ $y_1=a+2$, $y_2=4a+3$,

∵ $y_1 > y_2$, ∴ $a+2 > 4a+3$, 解得: $a < -\frac{1}{3}$,

∴该二次函数的图象开口向下, 对称轴为直线 $x = -\frac{1}{2a}$,

∵ $a < -\frac{1}{3}$, ∴ $-2a > \frac{2}{3}$, 即 $0 < -\frac{1}{2a} < \frac{3}{2}$,

∴当 $1 \leq -\frac{1}{2a} < \frac{3}{2}$ 时, 即 $-\frac{1}{2} \leq a < -\frac{1}{3}$,

此时二次函数在 $0 \leq x \leq 1$ 上, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 二次函数在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值为 $m = a + 2$,

$$\because -\frac{1}{2} \leq a < -\frac{1}{3}, \therefore \frac{3}{2} \leq m < \frac{5}{3},$$

当 $0 < -\frac{1}{2a} < 1$ 时, 即 $a < -\frac{1}{2}$,

$$\therefore \text{二次函数在 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 上的最大值为 } m = a\left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2a}\right) + 1 = \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a} + 1 = 1 - \frac{1}{4a},$$

$$\because a < -\frac{1}{2}, \therefore -4a > 2, \text{ 即 } 0 < -\frac{1}{4a} < \frac{1}{2}, \therefore 1 < m < \frac{3}{2};$$

综上所述: 最大值 m 的取值范围为 $1 < m < \frac{5}{3}$.

3. (2026 安徽) 已知抛物线 $y = \frac{3}{a^2}x(2a - x)$ ($a > 0$).

(1) 求抛物线顶点的纵坐标;

(2) 点 $A(x_1, \frac{3}{2})$, $B(x_2, \frac{3}{2})$ ($x_1 < x_2$) 都在抛物线上.

(i) 求 $\frac{x_1}{a}$ 的值;

(ii) 设 a 为正整数, 线段 AB 上横坐标为整数的点的个数为 m , 请比较 m 与 $2a - 2$ 的大小, 并说明理由.

【分析】(1) 根据抛物线解析式求出抛物线与 x 轴的两个交点, 再根据对称性代入对称轴横坐标, 即可求出顶点纵坐标;

(2) (i) 根据点 A, B 的纵坐标, 令 $y = \frac{3}{2}$ 求出 x_1, x_2 , 即可求出 $\frac{x_1}{a}$;

(ii) 根据 (i) 求出 $AB = x_2 - x_1 = \sqrt{2}a$, 那么 m 不可能超过 $\sqrt{2}a + 1$, 令 $\sqrt{2}a + 1 < 2a - 2$, 可知 $a \geq 6$ 时, $m < 2a - 2$ 恒成立, 故只用对 $a = 1, 2, 3, 4, 5$ 依次分类讨论即可.

【解答】解: (1) 令 $y = 0$, 求得抛物线与 x 轴的两个交点为 $(0, 0)$, $(2a, 0)$,

则抛物线的对称轴为 $x = \frac{0+2a}{2} = a$,

把 $x = a$ 代入抛物线解析式得 $y = \frac{3}{a^2} \times a(2a - a)$, 解得 $y = 3$, 即为抛物线顶点的纵坐标;

(2) (i) 令 $y = \frac{3}{2}$, 可得 $x(2a - x) = \frac{a^2}{2}$, 即 $x^2 - 2ax + \frac{a^2}{2} = 0$,

$$\because x_1 < x_2, \text{ 故解得 } x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a, x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}a, \therefore \frac{x_1}{a} = \frac{2-\sqrt{2}}{2};$$

(ii) 当 $a=1, 2, 3$ 时, $m > 2a-2$; 当 $a \geq 4$ 时, $m < 2a-2$. 理由如下:

由 (i) 得 $AB = x_2 - x_1 = \sqrt{2}a$, 已知 $\sqrt{2} \approx 1.414$, 显然成立 $m < \sqrt{2}a + 1$,

$$\text{令 } \sqrt{2}a + 1 < 2a - 2, \text{ 解得 } a > 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 5.121,$$

也就是说, 当 $a \geq 6$ 时, $m < 2a-2$ 恒成立, 故只用讨论 $a=1, 2, 3, 4, 5$ 的情形:

$$a=1 \text{ 时, } x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.293, x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.707, \text{ 故整数点只有 } x=1,$$

$$\therefore m=1, 2a-2=0, \therefore m > 2a-2;$$

$$a=2 \text{ 时, } x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586, x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414, \text{ 故整数点有 } x=1, x=2, x=3,$$

$$\therefore m=3, 2a-2=2, \therefore m > 2a-2;$$

$$a=3 \text{ 时, } x_1 = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 0.879, x_2 = 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 5.121, \text{ 故整数点有 } x=1, x=2, x=3, x$$

$$=4, x=5, \therefore m=5, 2a-2=4, \therefore m > 2a-2;$$

$$a=4 \text{ 时, } x_1 = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1.172, x_2 = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6.828, \text{ 故整数点有 } x=2, x=3, x=4, x$$

$$=5, x=6, \therefore m=5, 2a-2=6, \therefore m < 2a-2;$$

$$a=5 \text{ 时, } x_1 = 5 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 1.465, x_2 = 5 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 8.535,$$

$$\text{故整数点有 } x=2, x=3, x=4, x=5, x=6, x=7, x=8,$$

$$\therefore m=7, 2a-2=8, \therefore m < 2a-2;$$

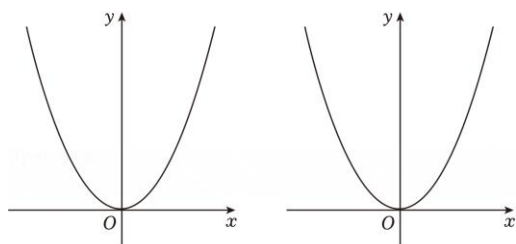
综上所述, 当 $a=1, 2, 3$ 时, $m > 2a-2$; 当 $a \geq 4$ 时, $m < 2a-2$.

4. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=kx+2$ ($k>0$) 与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A, B 两点. C, D 两点在抛物线上, 且 $CD \parallel AB$.

(1) 若点 A 的坐标为 $(-1, 1)$, 求 k 的值和点 B 的坐标;

(2) 在 (1) 的条件下, 记 C, D 两点的横坐标分别为 m, n ($m < n$), 当 $m \leq x \leq n$ 时, 函数 $y = (x-h)^2$ 总在 $x=n$ 处取得最大值, 求 h 的取值范围;

(3) 若 $AB=2CD$, 直线 AC, BD 的交点 E 恰好落在 x 轴正半轴上, 求点 E 的坐标和 k 的值.



备用图

【分析】(1) 先求出 k 值，再联立解析式即可得解；

(2) 先找到 m, n 范围，再确定对称轴 $x=h$ 范围；

(3) 易证 CD 为中位线，可得 C, D 坐标与 A, B 坐标的关系，再由韦达定理可得 $x_A + x_B, x_A \cdot x_B, x_C + x_D, x_C \cdot x_D$ ，进而建立方程求解即可。

【解答】解：(1) 将点 $A(-1, 1)$ 代入 $y=kx+2$ 得， $1=-k+2$ ，解得 $k=1$ ，

令 $x+2=x^2$ ，则 $x^2-x-2=0$ ，解得 $x=2$ 或 $x=-1$ ， $\therefore B(2, 4)$ ；

(2) 如图，设 $CD: y=x+t$ ，

联立 $y=x+t$ 与 $y=x^2$ 得 $x^2-x-t=0$ ，

令 $\Delta=1+4t=0$ ， $\therefore t=-\frac{1}{4}$ ，

此时 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ ，解得 $x=\frac{1}{2}$ ，

$\therefore m < \frac{1}{2}$ ， $y=(x-h)^2$ 对称轴为 $x=h$ ，

$\therefore$ 当 $h \leq \frac{1}{2}$ 时， $y=(x-h)^2$ 总在 $x=n$ 处取最大值；

(3) 设 $E(m, 0)$ ，

$\because CD \parallel AB, CD = \frac{1}{2}AB$ ， $\therefore CD$ 为 $\triangle ABE$ 中位线，

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ， $\therefore C(\frac{x_1+m}{2}, \frac{y_1}{2}), D(\frac{x_2+m}{2}, \frac{y_2}{2})$ ，

联立 AB 与 $y=x^2$ 得 $x^2-kx-2=0$ ，则 $x_1+x_2=k, x_1 \cdot x_2=-2$ ，

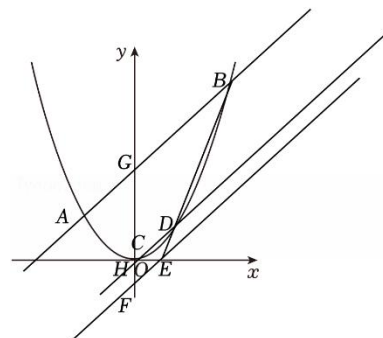
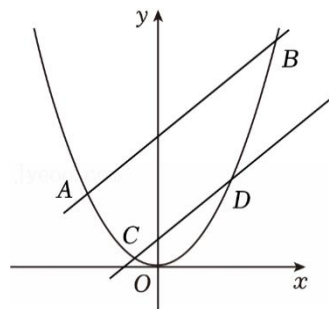
过 E 作 $EF \parallel AB$ 交 y 轴于 F ，

$\therefore$ 直线 $EF: y=kx-km$ ， $\therefore F(0, -km)$ ，

延长 CD 交 y 轴于 H ，记 AB 交 y 轴于 G ，

$\because AB \parallel CD \parallel EF, \therefore \frac{GH}{HF} = \frac{BD}{DE} = 1$ ，

$\therefore H$ 为 G, F 中点， $\therefore H(0, \frac{km+2}{2})$ ，



$$\therefore \text{直线 } CD: y = kx - \frac{km}{2} + 1,$$

$$\text{联立 } CD \text{ 与 } y = x^2 \text{ 得 } x^2 - kx + \frac{km}{2} - 1 = 0, \text{ 则 } x_C + x_D = k, x_C \cdot x_D = \frac{km}{2} - 1,$$

$$\therefore \frac{x_1+m}{2} + \frac{x_2+m}{2} = k, \text{ 即 } \frac{x_1+x_2+2m}{2} = k,$$

$$\therefore x_1+x_2=k, \therefore k=2m,$$

$$\frac{x_1+m}{2} \cdot \frac{x_2+m}{2} = \frac{km}{2} - 1, \text{ 即 } \frac{x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2}{4} = \frac{km}{2} - 1, \text{ 解得 } \begin{cases} m = \sqrt{2} \\ k = 2\sqrt{2} \end{cases},$$

$$\therefore E(\sqrt{2}, 0), k = 2\sqrt{2}.$$

5. 若两个二次函数图象的顶点、开口方向都相同，则称这两个二次函数为“同簇二次函数”。

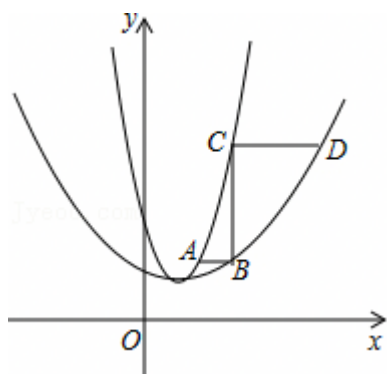
(1) 请写出两个为“同簇二次函数”的函数。

(2) 已知关于 x 的二次函数 $y_1 = 2x^2 - 4mx + 2m^2 + 1$ 和 $y_2 = ax^2 + bx + \frac{5}{4}$ ，其中 y_1 的图象经过点 $P(1, 1)$ ， y_2 与 y_1 为“同簇二次函数”，

①求 m 的值及函数 y_2 的表达式。

②如图点 A 和点 C 是函数 y_1 上的点，点 B 和点 D 是函数 y_2 上的点，且都在对称轴右侧，

若 $AB \parallel CD \parallel x$ 轴， $BC \perp AB$ ，求 $\frac{CD}{AB}$ 的值（只需直接写出答案）。



【分析】(1) 根据“同簇二次函数”的定义，只要两个函数的顶点、开口方向都一样即可；

(2) ①把 P 点坐标代入 $y_1 = 2x^2 - 4mx + 2m^2 + 1$ ，可求得 m 的值，则可求得其解析式；由 y_1 的解析式可求得其顶点坐标，则可得 y_2 的顶点坐标，代入可求得 y_2 的解析式；②设点 B 的坐标为 $(n, \frac{1}{4}(n-1)^2 + 1)$ ($n > 1$)，由 $AB \parallel CD \parallel x$ 轴和 $BC \perp AB$ 利用二次函数图象上点的坐标特征即可得出点 B 、 C 、 D 的坐标，再根据两点间的距离可求出 AB 、 CD 的长度，将其代入 $\frac{CD}{AB}$ 即可得出结论。

【解答】解：（1） $\because y=x^2$ 和 $y=2x^2$ 的顶点均为 $(0, 0)$ ，且开口向上，

$\therefore y=x^2$ 和 $y=2x^2$ 为“同簇二次函数”。

（2）①把 $P(1, 1)$ 代入 $y_1=2x^2-4mx+2m^2+1$ ，

得： $1=2-4m+2m^2+1$ ，解得： $m=1$ ，

$\therefore y_1=2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1$ 。

$\therefore y_2$ 与 y_1 为“同簇二次函数”，

$\therefore$ 顶点一样为 $(1, 1)$ ，即 $y_2=a(x-1)^2+1$ ， $\therefore a+1=\frac{5}{4}$ ， $\therefore a=\frac{1}{4}$ ，

$\therefore$ 函数 y_2 的表达式为 $y_2=\frac{1}{4}(x-1)^2+1=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ 。

②设点 B 的坐标为 $(n, \frac{1}{4}(n-1)^2+1)$ ($n>1$)，

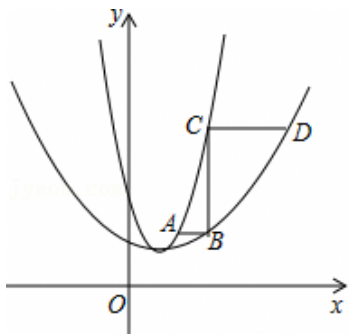
$\because AB \parallel x$ 轴， $\therefore$ 点 A 的坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{4}(n-1)+1, \frac{1}{4}(n-1)^2+1)$ ，

$\because AB \parallel CD \parallel x$ 轴， $BC \perp AB$ ，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(n, 2(n-1)^2+1)$ ，点 D 的坐标为 $(2\sqrt{2}(n-1)+1, 2(n-1)^2+1)$ 。

$\therefore AB=n - [\frac{\sqrt{2}}{4}(n-1)+1] = (n-1)(1-\frac{\sqrt{2}}{4})$ ， $CD=2\sqrt{2}(n-1)+1 - n = (n-1)(2\sqrt{2}-1)$ ，

$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{(n-1)(2\sqrt{2}-1)}{(n-1)(1-\frac{\sqrt{2}}{4})} = \frac{2\sqrt{2}-1}{\frac{4-\sqrt{2}}{4}} = 2\sqrt{2}$ 。



6. 数学活动课上，同学们将两个全等的三角形纸片完全重合放置，固定一个顶点，然后将其中一个纸片绕这个顶点旋转，来探究图形旋转的性质。已知等腰直角三角形纸片 ABC 和 ADE 中， $AB=BC=AD=DE=\sqrt{2}$ ， $AC=AE=2$ ， $\angle ABC=\angle ADE=90^\circ$ 。

【初步感知】

（1）如图 1，纸片 ADE 绕点 A 逆时针旋转 60° ，连接 CE ， CD ，证明 CD 平分 $\angle ACE$ ；

【深入探究】

（2）在（1）条件下，如图 2，延长 ED 交 BC 于 F ，求 BF 的长；

【拓展延伸】

(3) 在纸片 ADE 绕点 A 旋转过程中, 试探究 C, D, E 三点能否构成直角三角形. 若能, 直接写出所有直角三角形 CDE 的面积; 若不能, 请说明理由.

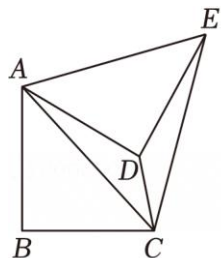


图1

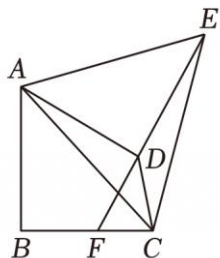
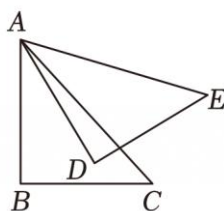


图2



备用图

【分析】(1) 根据旋转的性质得到 $AC=AE$, $AD=AB$, $DE=BC$, $\angle CAE=60^\circ$, 根据全等三角形的性质得到 $\angle ACD=\angle ECD$, 求得 CD 平分 $\angle ACE$;

(2) 连接 AF , 根据旋转的性质得到 $AB=AD$, $\angle BAD=60^\circ$, $\angle ADE=\angle B=90^\circ$, 求得 $\angle ADB=90^\circ$, 根据全等三角形的性质得到 $\angle BAF=\angle DAF=\frac{1}{2}\angle BAD=30^\circ$, 求得 $BF=AB \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$;

(3) 分四种情况分别画出图形解答即可.

【解答】(1) 证明: $\because$ 纸片 ADE 绕点 A 逆时针旋转 60° ,

$\therefore AC=AE$, $AD=AB$, $DE=BC$, $\angle CAE=60^\circ$,

$\because AB=BC$, $\triangle ACE$ 是等边三角形, $\therefore AD=DE$, $AC=CE$,

$\because CD=CD$, $\therefore \triangle ACD \cong \triangle ECD$ (SSS), $\therefore \angle ACD=\angle ECD$, $\therefore CD$ 平分 $\angle ACE$;

(2) 解: 连接 AF , $\because$ 纸片 ADE 绕点 A 逆时针旋转 60° ,

$\therefore AB=AD$, $\angle BAD=60^\circ$, $\angle ADE=\angle B=90^\circ$, $\therefore \angle ADB=90^\circ$,

$\because AF=AF$, $\therefore \text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle ADF$ (HL),

$\therefore \angle BAF=\angle DAF=\frac{1}{2}\angle BAD=30^\circ$, $\because AB=\sqrt{2}$,

$\therefore BF=AB \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$;

(3) 解: C, D, E 三点能构成以 CE 为直角边的直角三角形; 理由如下:

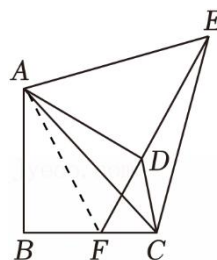


图2

如图 3, 当 $DE \perp EC$ 时, 此时 $\triangle CDE$ 是直角三角形,

过点 A 作 $AQ \perp EC$ 于点 Q ,

$$\because AE=AC=2, \therefore EQ=QC=\frac{1}{2}EC,$$

$$\because AQ \perp EC, DE \perp EC, DE \perp AD,$$

$$\therefore \text{四边形 } ADEQ \text{ 是矩形}, \therefore AD=EQ=QC=\frac{1}{2}EC=\sqrt{2},$$

$$\therefore EC=2\sqrt{2}, \text{ 故 } S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}EC \cdot DE=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}=2;$$

如图 4, 当 $DC \perp EC$ 时, 此时 $\triangle CDE$ 是直角三角形, 过点 A 作 $AQ \perp EC$ 于点 Q , 交 DE 于点 N ,

$$\therefore \text{设 } EQ=QC=\frac{1}{2}EC=x, NQ \parallel CD,$$

$$\therefore \frac{EN}{DN}=\frac{EQ}{QC}=1,$$

$$\therefore DN=EN=\frac{1}{2}DE=\frac{\sqrt{2}}{2}, QN=\frac{1}{2}DC,$$

$$\because \angle AND=\angle ENQ, \angle ADN=\angle EQN=90^\circ, \therefore \angle DAN=\angle QEN,$$

$$\therefore \tan \angle DAN=\tan \angle QEN, \therefore \frac{QN}{EQ}=\frac{DN}{AD}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore QN=\frac{1}{2}x, \therefore DC=x, CE=2x,$$

$$\because ED^2=DC^2+EC^2, \therefore (\sqrt{2})^2=(2x)^2+x^2, \therefore x^2=\frac{2}{5},$$

$$\text{故 } S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}EC \cdot DC=\frac{1}{2} \times 2x \times x=x^2=\frac{2}{5};$$

如图 5,

$$\text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中}, S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}CD \cdot DE=\frac{1}{2} \times (2-\sqrt{2}) \times \sqrt{2}=\sqrt{2}-1;$$

当 AD 在 CA 的延长线上时, $DE \perp AC$, 此时 $\triangle CDE$ 是直角三角形, 如图,

$$\therefore S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}CD \cdot DE=\frac{1}{2} \times (\sqrt{2}+2) \times \sqrt{2}=\sqrt{2}+1;$$

综上, C, D, E 三点能构成以 CE 为直角边的直角三角形; 直角三角形 CDE 的面积为 2

或 $\frac{2}{5}$ 或 $\sqrt{2}-1$ 或 $\sqrt{2}+1$.

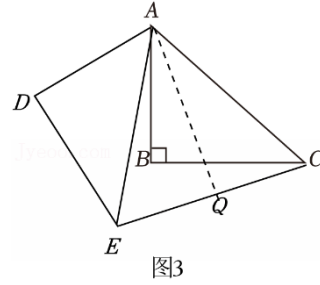


图3

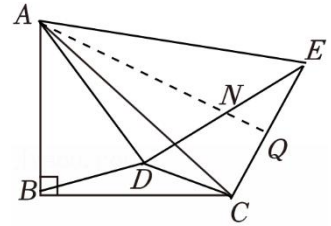


图4

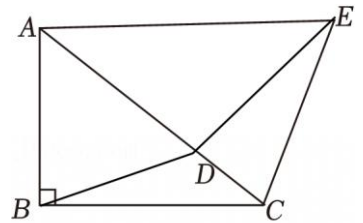


图5

